

Mathematik

Abiturvorbereitungen

SIMON SURE

ABITUR 2022

VERSION 1.0

Vorwort

Moin!

Dieses Skript erstelle ich zur individuellen Vorbereitung auf das Abitur 2022. Es kann gerne zur persönlichen Abiturvorbereitung genutzt werden. Die Veränderung oder Verbreitung der Datei ist nicht gestattet.

Der unten aufgeführte Download-Link kann jedoch gerne weitergegeben werden. Dort findet sich immer die neuste Version des Skripts. Bis zum Ende des Abiturs ist mit regelmäßig Korrekturen zu rechnen. Bei Anregungen, Feedback und Verbesserungsvorschlägen bitte unter unten angegebener Web-Adresse eine Nachricht senden.

Zum aktuellen Zeitpunkt wird die Datei noch viele Rechtschreibfehler enthalten. Diese können auch gerne über den Feedback-Link gemeldet werden.

Keine Garantie für Vollständigkeit oder Korrektheit!

Simon

Download-Link

<https://simonsure.com/education/abitur-2022/>

Feedback-Link

<https://simonsure.com/contact/>

To-Do Liste

- Taschenrechnerhinweise
- Strukturüberarbeitung (Inhaltsverzeichnis optimieren)

Inhaltsverzeichnis

| | |
|----------------------|---|
| Vorwort | 2 |
| Inhaltsverzeichnis | 3 |
| Inhalte | 4 |
| Grundlegendes Wissen | |
| Analysis | |
| Lineare Algebra | |
| Stochastik | |

Inhalte

| | |
|--|----|
| Grundlegendes Wissen | 7 |
| Schreibweisen | 7 |
| Grundlegende Funktionsgraphen | 7 |
| Analysis | 9 |
| ganzrationale Funktionen | 9 |
| Verhalten für Grenzwerte | 9 |
| Graphen | 9 |
| ganzrationale Funktionen bestimmen | 9 |
| Exponentialfunktionen | 9 |
| Eigenschaften von Exponentialfunktionen | 9 |
| Lösen einer Exponentialgleichung | 9 |
| Die Ableitung von Exponentialfunktionen | 10 |
| Die natürliche Exponentialfunktion | 10 |
| Der Logarithmus (Wurzel und Potenz) | 10 |
| Ableitung von Exponentialfunktionen | 10 |
| Eigenschaften von Exponentialfunktionen | 10 |
| Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang | 10 |
| Beschränktes Wachstum | 11 |
| Umkehrfunktion (der natürlichen Exponentialfunktion) | 11 |
| Zusammengesetzte Funktionen | 11 |
| Strategien für das Lösungen von Gleichungen | 11 |
| Funktionen mit Parametern | 12 |
| Ortskurve charakteristischer Punkte | 12 |
| Gemeinsame Punkte der Graphen einer Funktionenschar | 12 |
| Differenzialrechnung | 12 |
| Ableitungsbegriff | 12 |
| Allgemeine Regeln | 13 |
| Regel für ganzrationale Funktionen: Potenzregel | 13 |
| Regeln für Exponentialfunktionen | 13 |
| Regeln für weitere Funktionen | 13 |
| Regeln für verkettete Funktionen | 13 |
| die Bedeutung der Ableitungen | 13 |
| Integralrechnung | 14 |
| Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung | 14 |
| Integralfunktion | 15 |
| Berechnung von (nicht orientierten) Flächeninhalten | 15 |
| Unbegrenzte Flächen - Uneigentliche Integrale | 15 |
| Integral und Rauminhalt | 16 |
| Mittelwert von Funktionen | 16 |
| Produktintegration | 16 |
| Integration durch Substitution | 16 |
| Regeln für ganzrationale Funktionen | 16 |
| Regeln für Exponentialfunktionen | 16 |
| Funktionsanalyse | 16 |
| Nullstellen | 16 |
| Schnittpunkt mit der x -Achse | 16 |
| Extremstellen | 16 |
| Wendestellen | 17 |
| Symmetrie | 17 |
| Grenzwertuntersuchung | 17 |
| Sätze | 18 |

| | |
|---|----|
| Monotoniesatz | 18 |
| Weitere Aufgabentypen | 18 |
| Extremwertprobleme mit Nebenbedingung | 18 |
| Zusammengesetzte Funktionen im Sachzusammenhang | 18 |
| Lineare Algebra | 19 |
| Lineare Gleichungssysteme | 19 |
| Äquivalenzumformung eines LGS | 19 |
| Das dreidimensionale Koordinatensystem | 19 |
| Punkte | 20 |
| Vektoren | 20 |
| Rechnen mit Vektoren | 20 |
| Linearkombination | 20 |
| Skalarprodukt | 21 |
| Vektorprodukt | 21 |
| Geraden | 21 |
| Zeichnen einer Geraden im Raum | 21 |
| Ebenen | 22 |
| Parameterform | 22 |
| Normalengleichung | 22 |
| Kooridnatengleichung | 22 |
| Umformungen | 22 |
| Lagebeziehungen | 22 |
| Gegenseitige Lage von Geraden | 22 |
| Lagebeziehung Ebene Gerade | 23 |
| Lagebeziehung Ebene Ebene | 24 |
| Winkel | 24 |
| Winkel zwischen Vektoren | 24 |
| Schnittwinkel Gerade Gerade | 25 |
| Schnittwinkel Ebene Ebene | 25 |
| Schnittwinkel Gerade Ebene | 25 |
| Abstände | 25 |
| Abstand Punkt Punkt | 25 |
| Abstand Punkt Ebene | 25 |
| Abstand Punkt Gerade | 26 |
| Abstand Gerade Gerade | 26 |
| Abstand Gerade Ebene | 27 |
| Abstand Ebene Ebene | 27 |
| Stochastik | 28 |
| Grundlagen | 28 |
| Baumdiagramm | 28 |
| Laplace Experiment | 28 |
| Daten darstellen und Kenngrößen beschreiben | 28 |
| Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen | 28 |
| Gauß'sche Faustregel | 29 |
| -Gesetz | 29 |
| Bedingte Wahrscheinlichkeit | 29 |
| Vierfeldertafel | 29 |
| Bernoulli | 29 |
| Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung | 29 |
| Kumulierte Wahrscheinlichkeit | 30 |
| Kenngrößen der Binomialverteilung | 30 |
| Praxis der Binomialverteilung | 30 |
| Problemlösen mit der Binomialverteilung | 30 |
| Von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen | 30 |
| Zweiseitige Signifikanztest | 31 |
| Einseitiger Signifikanztest | 31 |
| Fehler bei Hypothesentests | 31 |
| Signifikanz und Relevanz | 32 |
| Normalverteilung | 32 |
| Stetige Zufallsgrößen | 32 |

| | |
|---------------------------------|----|
| Gauß'sche Glockenform | 33 |
| Normalverteilung | 33 |
| Testen bei der Normalverteilung | 33 |
| Stochastische Prozesse | 34 |
| Stochastische Prozesse | 34 |
| Stochastische Matrizen | 34 |
| Grenzverhalten | 35 |

Grundlegendes Wissen

Schreibweisen

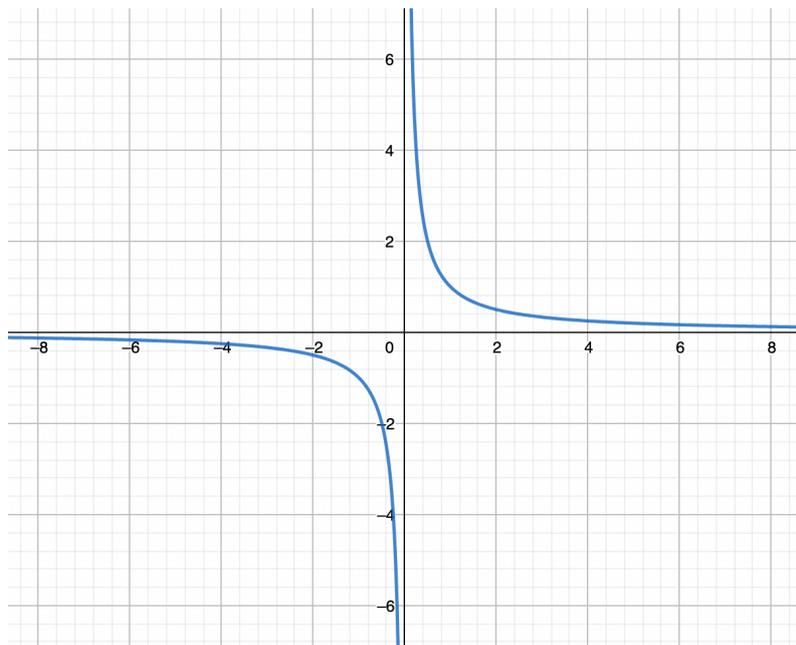
$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\sqrt[x]{y^n} = y^{\frac{n}{x}}$$

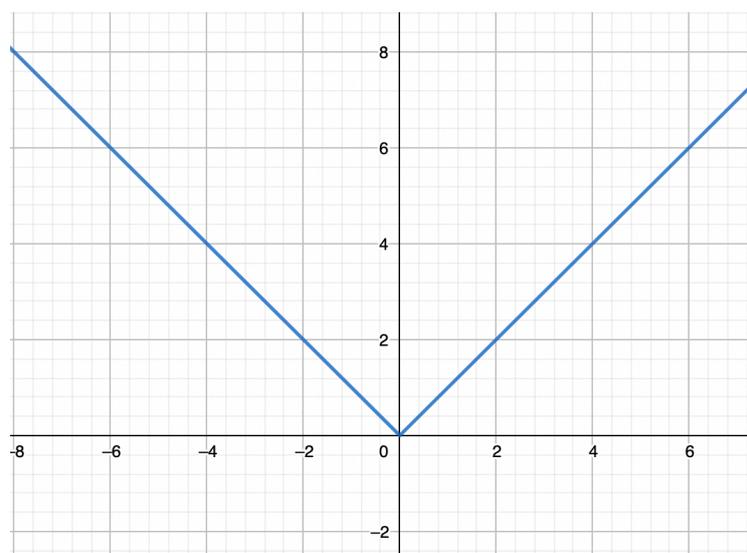
Grundlegende Funktionsgraphen

Nicht ergänzen: Wurzel, Potenz, Exponential
Und in den passenden Abschnitten einpflegen

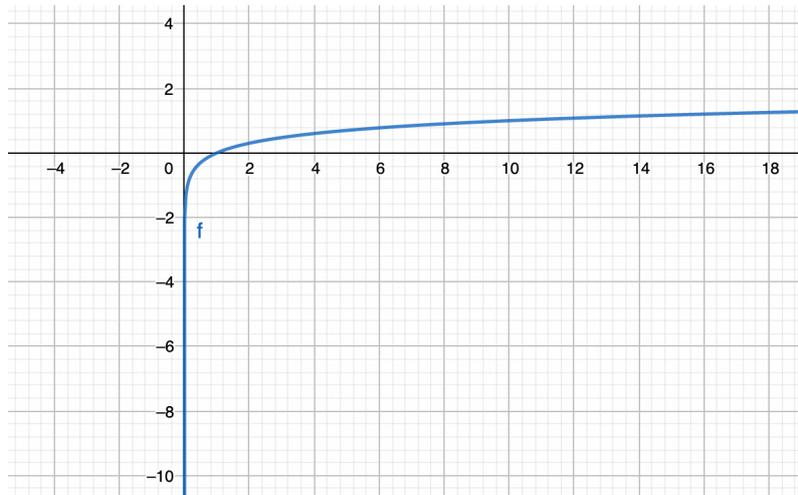
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = \log_{10}(x)$$



Analysis

ganzrationale Funktionen

Eine Funktion der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ nennt man ganzrationale Funktion, mit $n \in \mathbb{N}$.

Der Grad der Funktion wird durch den höchsten Exponenten von x bestimmt. Entsprechend obiger Definition sind linear, quadratisch, .. Funktionen ganzrationale Funktionen.

Verhalten für Grenzwerte

| | $x \rightarrow -\infty$ | $x \rightarrow +\infty$ |
|-------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| n ungerade, Vorzahl positiv | $-\infty$ | $+\infty$ |
| n ungerade, Vorzahl negativ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| n gerade, Vorzahl positiv | $+\infty$ | $+\infty$ |
| n gerade, Vorzahl negativ | $-\infty$ | $-\infty$ |

Graphen

..

ganzrationale Funktionen bestimmen

Vorgegebene Punkt eines Graphen sowie die Eigenschaften der Ableitungen kann man verwenden, um eine Funktionsgleichung zu einem Graphen/einem Sachverhalt zu bestimmen.

Strategie zur Bestimmung einer ganzrationalen Funktion

1. Überlegen, welchen Grad n die ganzrationale Funktion haben sollte, und die entsprechende Funktionsgleichung mit $n + 1$ Parametern notieren.
2. Aufstellen geeigneter Gleichungen für f, f', f'' etc. aus den vorliegenden Informationen. Zur Bestimmung einer Funktion n -ten Grades benötigt man mind. $n + 1$ Gleichungen mit eindeutigen Informationen.
3. Lösen des entstehenden linearen Gleichungssystems.
4. Funktionsgleichung notieren (und kontrollieren).

Exponentialfunktionen

Während bei ganzrationalen Funktionen die Variable x immer als Basis auftritt, steht die Variable x bei Exponentialfunktionen im Exponenten. Exponentialfunktionen spielen bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen eine wichtige Rolle.

Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($a > 0; a \neq 1$) heißt Exponentialfunktion.

Dabei entspricht a dem Wachstumsfaktor und c einem Startwert (im Anwendungsfall häufig Startbestand).

Wenn eine Exponentialfunktion einen Wachstumsvorgang beschreibt, handelt es sich für $a > 1$ um eine exponentielle Zunahme und für $a < 1$ um eine exponentielle Abnahme. Der Faktor c entspricht dem Anfangsbestand $f(0)$ zum Zeitpunkt $x = 0$.

Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Es gelte $f(x) = c \cdot a^x$

- Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen. Ihr Graph verläuft entweder über oder unterhalb der x -Achse.
- Der Graph verläuft immer durch $A(0 | c)$.
- Für sehr große x -Werte bei $a < 1$ bzw. sehr kleine x -Werte bei $a > 1$ nähern sich die Funktionswerte der x -Achse beliebig nah an.

Lösen einer Exponentialgleichung

Die Lösung einer Exponentialgleichung $a^x = b$ ($a, b > 0$) bezeichnet man als $x = \log_a(b)$ (sprich: Logarithmus von b zur Basis a). Der $\log_a(b)$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Die Ableitung von Exponentialfunktionen

An verschiedenen Graphen von Exponentialfunktionen kann erkannt werden, dass die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f ein Vielfaches von f ist. Es gilt also $f'(x) = k * f(x)$. Da $f'(0) = k$ gilt, entspricht der Proportionalitätsfaktor dem Wert der Ableitung an der Stelle $x = 0$. Über den Differenzenquotienten ist dieser Zusammenhang auch für beliebige Basen nachweisbar.

Durch Grenzwertbetrachtung und Umformung erhält man aus $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ mit f als

$$\text{Exponentialfunktion } a^x: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a^{x_0} * f'(0) \rightarrow f'(x) = f'(0) * f(x)$$

Für die Ableitung von Exponentialfunktionen vom Typ $f(x) = a^x$ ($a > 0$), gilt: $f'(x) = f'(0) = a^x$.

Die natürliche Exponentialfunktion

Untersuchungen des Proportionalitätsfaktors k für verschiedene Basen legen nahe, dass es eine Basis gibt, für die $f'(0) = 1$ gilt. Dann würde $f(x) = f'(x)$ gelten. Die Basis mit dieser Eigenschaft wird Euler'sche Zahl genannt und mit e bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Euler'sche Zahl e irrational ist.

Die zur Euler'schen Zahl zugehörige Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ wird natürliche Exponentialfunktion genannt.

Der Logarithmus (Wurzel und Potenz)

Die Umkehrrechnung zur Wurzel- und Potenzenrechnung wird Logarithmus genannt.

Die Wurzel $\sqrt[x]{y} = a$ fragt: Welche Zahl a muss x Mal mit sich selbst multipliziert werden, um y zu ergeben.

Die Potenz $a^x = y$ fragt: Welche Zahl y entsteht, wenn a x Mal mit sich selbst multipliziert wird.

Der Logarithmus $\log_a(y) = x$ fragt: Wie oft (x) muss a mit sich selber multipliziert werden, um y zu ergeben. Ein Sonderfall des Logarithmus ist der natürliche Logarithmus. Es ist der Logarithmus zur Basis e . Es gilt $\ln(x) = \log_e(x)$. Der natürliche Logarithmus ist nur für Werte > 0 definiert, da die natürliche Exponentialfunktion nur Werte > 0 annehmen kann.

Ableitung von Exponentialfunktionen

Es ist die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion bekannt. Um nun Ableitungen von Exponentialfunktionen mit beliebigen Basen berechnen zu können, schreibt man zunächst a^x als Potenz mit der Basis e . Es soll $a^x = e^{kx}$ gelten. Um k zu bestimmen, muss die Exponentialgleichung $e^k = a$ gelöst werden. Dies kann mit dem natürlichen Logarithmus erfolgen $\ln(a) = k$. Es folgt $f(x) = a^x = e^{\ln(a)x}$.

Für die Ableitungsfunktion gilt dann $f'(x) = \ln(a) * e^{\ln(a)x} = \ln(a) * a^x$. Außerdem ist F mit $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} * e^{\ln(a)x}$ eine Stammfunktion von f .

Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Es gelte $f(x) = c * e^{kx}$.

- Es gilt für alle $k \in \mathbb{R}$: $f(0) = c$
- f hat keine Nullstellen.
- Die Graphen zu $f_k(x) = c * e^{kx}$ und $f_{-k}(x) = c * e^{-kx}$ spiegeln sich an der x -Achse.
- Für $c > 0$ verläuft der Graph oberhalb der x -Achse und ist links gekrümmt.
- Für $c > 0$ und $k > 0$ ist f streng monoton steigend. Für $c > 0$ und $k < 0$ ist f streng monoton fallend.
- Für $c < 0$ verlaufen die Graphen unterhalb der x -Achse. Sie ergeben sich durch Spiegelung der entsprechenden Graphen mit $|c| * e^{kx}$ an der x -Achse.

Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang

Viele Wachstums- und Zerfallsprozesse lassen sich durch Exponentialfunktionen beschreiben. Bei $f(x) = c * a^x$ entspricht c dem Anfangsbestand. a wird als Wachstumsfaktor bezeichnet.

Exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme liegt vor, wenn ein Bestand von einem Zeitschritt zum nächsten um den gleichen Wachstumsfaktor a zu- bzw. abnimmt. Den Bestand zum Zeitpunkt t kann man dann mithilfe einer Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$ bestimmen. Mit $k = \ln(a)$ gilt auch $f(t) = c \cdot e^{kt}$. Die Ableitung beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit des Bestands zum Zeitpunkt t .

Man nennt die Zeit, in der sich der Anfangsbestand verdoppelt bzw. halbiert, Verdopplungszeit T_v , bzw. Halbwertszeit T_H .

Für eine Verdopplung muss $e^{kT_v} = a^x = 2$ gelten. Es folgt $T_v = \frac{\ln(2)}{k}$ oder $T_v = \log_a(2)$.

Für eine Halbierung muss $e^{kT_H} = a^x = \frac{1}{2}$ gelten. Es folgt $H_v = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$ oder $H_v = \log_a(\frac{1}{2})$.

Beschränktes Wachstum

Wenn sich Funktionswerte einem Wert immer mehr annähern, diesen aber im Modell nie erreichen, spricht man von beschränktem Wachstum oder der beschränkten Abnahme.

Beschränktes Wachstum oder beschränkte Abnahme mit der Schranke S liegen vor, wenn die Differenz zwischen einer Schranke S und dem Bestand zum Zeitpunkt t exponentiell abnehmen.

Für exponentielles Wachstum gilt für den Bestand zum Zeitpunkt t : $f(t) = S - c \cdot a^t$ ($0 < a < 1$).

Für exponentielle Abnahme gilt für den Bestand zum Zeitpunkt t : $f(t) = S + c \cdot a^t$ ($0 < a < 1$).

Wird $a > 0$, existiert die Grenze für $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

Umkehrfunktion (der natürlichen Exponentialfunktion)

Eine Funktion f heißt umkehrbar, wenn es zu jedem y aus der Wertemenge von f genau ein x aus der Definitionsmenge von f mit $f(x) = y$ gibt. In anderen Worten, für zwei unterschiedliche x -Werte muss es zwei unterschiedliche y -Werte geben. Wird die Umkehrfunktion gebildet und betrachtet, müssen Definitions- und Wertemenge für die Umkehrfunktion vertauscht werden.

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion f heißt natürliche Logarithmusfunktion \ln mit $\ln(x) = \bar{f}(x)$; $x \in \mathbb{R}^+$. Dies folgt durch die Vertauschung von x und y in $a^x = y$.

Aus der Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion f kann man auf die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion \bar{f} schließen. Die natürliche Logarithmusfunktion \bar{f} mit

$\bar{f}(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, hat die Ableitung \bar{f}' mit $\bar{f}'(x) = \frac{1}{x}$. Umgekehrt gilt, dass F mit

$F(x) = \ln(x)$ eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ (mit $x > 0$) ist.

Zusammengesetzte Funktionen

Aus mehreren gegebenen Funktionen können durch Addition (somit auch Subtraktion), Multiplikation (somit auch Division) und Verkettung neue Funktionen gebildet werden.

Für Addition gilt: $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$.

Für Multiplikation gilt: $(u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Für Verkettung gilt: $(u \circ v)(x) = u(v(x))$.

Strategien für das Lösen von Gleichungen

Wenn die Kriterien für die Funktionsanalyse bei zusammengesetzten Funktionen angewendet werden, müssen häufig Gleichungen gelöst werden. Durch die folgenden Strategien können Lösungsansätze gefunden werden.

Produkte werden Null

Ein Produkt wird Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Quotienten werden Null

Ein Quotient ist gleich null, wenn der Zähler null und der Nenner ungleich null ist (es darf nicht durch null geteilt werden.).

Ausklammern

Durch Ausklammern eines Funktionsteiles, können ggf. zwei Faktoren erzeugt werden, welche getrennt einfach(er) zu betrachten sind.

Substitution

Durch Substitution wird eine Funktion vereinfacht, indem ein bestimmter Funktionsteil (meist eine Potenz einer Variablen) durch eine neue Variable ersetzt wird. Sind für die neue Variable Lösungen gefunden, kann durch die Definition der Variablen die ursprüngliche Funktion gelöst werden.

PQ-Formel

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Funktionen mit Parametern

Enthält ein Funktionsterm außer der Variablen x noch einen Parameter a , so gehört zu jedem a eine Funktion f_a , die jedem x den Funktionswert $f_a(x)$ zuordnet. Die Funktionen f_a bilden eine Funktionenschar. Die Funktion f und ihr Graph der Funktion f verändern sich charakteristisch abhängig der Variablen a .

Untersucht man Funktionsscharen erhält man häufig Stellen oder Punkte in Abhängigkeit von einem Parameter. Für die Berechnung der Punkte und die Analyse der Funktion werden die Parameter wie Zahlen behandelt und zunächst ignoriert.

Ortskurve charakteristischer Punkte

Sei ein charakteristischer Punkt P in Abhängigkeit von einem Parameter gegeben. (Z. B. Tiefpunkt, Hochpunkt, Wendepunkt, Nullstelle, ...) Durchläuft der Parameter p alle zugelassenen Werte, so liegen alle möglichen Punkte auf einer Kurve. Diese Kurve heißt Ortskurve oder Ortslinie des Punktes P . Eine Gleichung erhält man wie folgt:

Die x -Koordinate von P mit $x = P_x$ nach dem Parameter umformen.

Die Gleichung für den Parameter in Abhängigkeit von x nun in die y -Koordinate einsetzen. Es entsteht ein Term mit x als Variablen. Alle Punkte P liegen nun auf der entstandenen Funktion.

Gemeinsame Punkte der Graphen einer Funktionenschar

Teilweise verlaufen alle Graphen einer Funktionenschar durch einen oder mehrere gemeinsame Punkte. Der Funktionswert an dieser Stelle hängt dann nicht vom Parameter ab. Um mögliche gemeinsame Punkte zu finden, kann man zwei unterschiedliche Namen a_1 und a_2 ($a_1 \neq a_2$) für den Parameter wählen und prüfen, ob die Gleichung $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$ eine Lösung besitzt, die nicht vom Parameter abhängt.

Differenzialrechnung

Ableitungsbegriff

Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist der Grenzwert des Differenzenquotienten (der Differenzialquotient), falls dieser Grenzwert existiert.

Mittlere Änderungsrate

Beschreibt die durchschnittliche Änderung der Größe f pro Einheit x auf dem Intervall $I = [x_0; x_0 + h]$. Es entspricht der Steigung der Sekante durch die Punkte $P(x_0 | f(x_0))$ und $Q(x_0 + h | f(x_0 + h))$

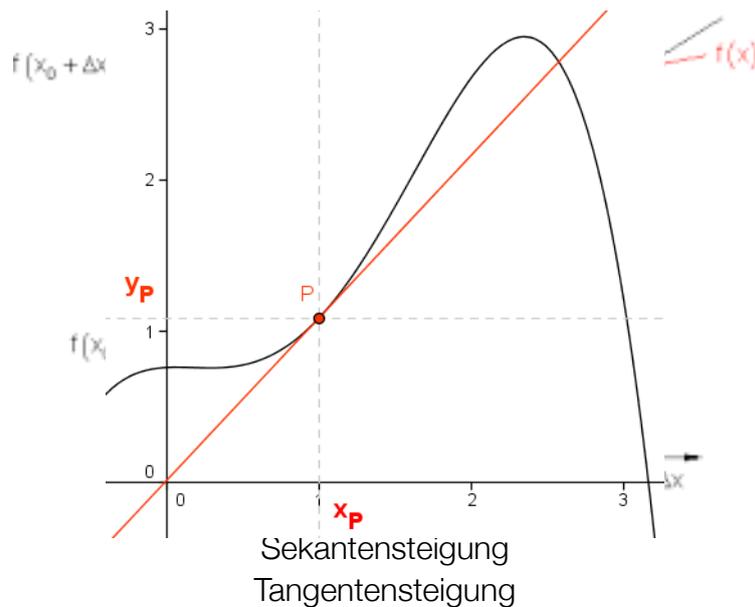
Differenzenquotient:
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Momentane/lokale Änderungsrate

Beschreibt die Änderung der Größe f pro Einheit x genau bei $x = h$. Dazu strebt der Differenzenquotient zwischen den Stellen x_0 und $x_0 + h$ für $h \rightarrow 0$ gegen einen Grenzwert. Er heißt dann Ableitung von f an der Stelle x_0 .

Die Gerade durch den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$ ist die Tangente im Punkt P . Der Graph von f hat an der Stelle x_0 die Steigung $f'(x_0)$.

Differenzialquotient:
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Die Ableitung f' ordnet jeder Stelle x_0 , an der f differenzierbar ist, $f'(x_0)$ zu. Die Bestimmung eines Funktionsterms für f' mithilfe des Differenzenquotienten ist aufwendig. Mit seiner Hilfe erhält man aber Ableitungsregeln.

Allgemeine Regeln

Diese Regeln gelten auch für die Integralrechnung.

Faktorregel

$$f(x) = a * g(x) \rightarrow f'(x) = a * g'(x)$$

Summenregel

$$f(x) = k(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = k'(x) + h'(x)$$

Regel für ganzrationale Funktionen: Potenzregel

$$f(x) = a^n \rightarrow f'(x) = n * a^{n-1}$$

Regeln für Exponentialfunktionen

$$f(x) = c * e^{ax} \rightarrow f'(x) = c * a * e^{ax}$$

$$f(x) = c * a^x = c * e^{\ln(a)x} \rightarrow f'(x) = c * \ln(a) * e^{\ln(a)x} = c * \ln(a) * a^x$$

Regeln für weitere Funktionen

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x) \rightarrow f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x)$$

Regeln für verkettete Funktionen

Produktregel

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so ist auch die Funktion $f = u \cdot v$ mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ differenzierbar, und es gilt: $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Diese Regel lässt sich aus dem Grenzwert des Differenzenquotienten für $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ herleiten.

(Vergleiche Buch S. 135)

Kettenregel

Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v mit $f(x) = u(v(x))$, so ist auch f differenzierbar, und es gilt: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$. Diese Regel lässt sich aus dem Grenzwert des Differenzenquotienten für $f(x) = u(v(x))$ herleiten.

(Vergleiche Buch S. 138)

die Bedeutung der Ableitungen

Erste Ableitung

Die erste Ableitung entspricht der Steigung eines Funktionsgraphen. Im Sachzusammenhang kann Sie auch als Änderungsrate oder Beschleunigung der ursprünglichen Größe interpretiert werden.

Zweite Ableitung

Die zweite Ableitung entspricht der Beschleunigung der Werte eines Funktionsgraphen.

Verläuft ein Graph für $x > x_0$ rechtsgekrümmt, werden die Werte $f'(x)$ mit zunehmenden x -Werten kleiner. Verläuft ein Graph für $x > x_0$ linksgekrümmt, werden die Werte $f'(x)$ mit zunehmenden x -Werten größer.

Das Krümmungsverhalten eines Graphen f lässt sich somit mit der Änderung der ersten Ableitung, also mit Hilfe der zweiten Ableitung $f''(x)$ bestimmen. Es gilt:

Ist die Funktion f auf dem Intervall I definiert und sind f und f' differenzierbar, gilt:

Wenn im Intervall I $f''(x) > 0$ gilt, dann ist der Graph von f in I linksgekrümmt. (Merkhilfe: 😊)

Wenn im Intervall I $f''(x) < 0$ gilt, dann ist der Graph von f in I rechtsgekrümmt. (Merkhilfe: 😞)

Wichtig: Entsprechend dem Monotoniesatz muss f'' allerdings nicht durchgängig eines der genannten Kriterien erfüllen, damit eine durchgängige Krümmung vorliegt.

Integralrechnung

Wenn die Funktion f die Änderung einer Größe in einem Intervall $[a; b]$ beschreibt, lässt sich die orientierte Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse als Gesamtänderung der Größe zwischen a und b deuten. Bei der orientierten Fläche werden Flächen über der x -Achse als Zuwachs und Flächen unter der x -Achse als Verringerung interpretiert. Erstere werden somit addiert, letzere subtrahiert.

Um auch bei gebogenen Graphen den orientierten Flächeninhalt bzw. die Gesamtänderung eindeutig zu bestimmen, nutzt man die Annäherung durch Rechtecke. Verbessert man diese Annäherung schrittweise führt dies zur Grenzwertbetrachtung. Diese Annäherung auf dem Intervall $I = [a; b]$ erfolgt entweder mit der Unter- oder Obersumme.

Für die Untersumme gilt:
$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} * f\left(\frac{b-a}{n} * i\right)$$

Für die Obersumme gilt:
$$O_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} * f\left(\frac{b-a}{n} * i\right)$$

In beiden Fällen ist $n \in \mathbb{N}$. Umso größer n , umso genauer ist die Annäherung. Das Integral der Funktion f auf $[a; b]$ ist nun als Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} U_n = \lim_{x \rightarrow \infty} O_n$ definiert. Man schreibt:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ (lies: Integral von } f(x) \text{ von } a \text{ bis } b).$$

Dabei wird $f(x)$ als Integrand, x als Integrationsvariable sowie a und b als untere und obere Integrationsgrenze bezeichnet.

Nun soll zu dem Integrand f eine Funktion F angegeben werden, mit welcher der Flächeninhalt berechnet werden kann. So eine Funktion nennet man dann Flächeninhaltsfunktion. Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu einer Funktion f auf dem Intervall I , wenn für alle $x \in I$ gilt: $F'(x) = f(x)$.

Dabei gilt der Satz: Sind F und G Stammfunktionen von f auf einem Intervall I , dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt: $F(x) = G(x) + c$.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Für eine stetige Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ wobei } F \text{ eine beliebige Stammfunktion von } f \text{ auf } [a; b] \text{ ist.}$$

Ergänzung zur Schreibweise bei der Berechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = - \int_b^a f(x) dx$$

(Herleitung: Siehe Buch S. 61.)

Integralfunktion

Integrale sind über ein Intervall $I = [a; b]$ definiert. Flächeninhaltsfunktionen (auch Stammfunktionen) betrachten nehmen als Untergrenze immer $a = 0$ an. Sogenannte Integralfunktionen geben das Integral in Abhängigkeit von der Obergrenze bei einer festen Untergrenze an.

Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig. Zu jeder Zahl $u \in I$ heißt die Funktion J_u mit

$$J_u(x) = \int_u^x f(t) dt \text{ mit } x \in I \text{ Integralfunktion von } f \text{ zur unteren Grenze } u.$$

Die Integralfunktion J_u ist differenzierbar mit $J'_u(x) = f(x)$ für $x \in I$. Somit ist jeder Integralfunktion J_u eine Stammfunktion von f .

Aus der Definition folgen auch die folgende weitere Eigenschaft: $J_u(u) = 0$

Eine konkrete Integralfunktion kann mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung bestimmt werden.

Berechnung von (nicht orientierten) Flächeninhalten

Zwischen Graph und x -Achse

Bei der Berechnung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x -Achse über dem Intervall $[a; b]$ geht man so vor:

1. Man bestimmt die Nullstellen von f auf $[a; b]$.
2. Man untersucht, welches Vorzeichen $f(x)$ in den Teilintervallen hat.
3. Man bestimmt die Inhalte der Teilflächen (Beträge der orientierten Flächeninhalte bzw. der Integrale) und addiert diese.

Zwischen zwei Funktionen

Wird eine Fläche über dem Intervall $[a; b]$ von den Graphen zweier Funktionen f und g begrenzt und gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$, dann gilt für ihren Inhalt A :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Unbegrenzte Flächen - Uneigentliche Integrale

Die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x -Achse lässt sich mit dem Integral berechnen. An Stelle fester Grenzen, kann die Fläche auch nach links oder rechts unbegrenzt sein. Da das Integral nur für feste Grenzen berechnet werden kann, muss eine Annäherung vorgenommen werden. Für eine nach rechts unbegrenzte Fläche wählt man für die Obergrenze und für eine nach links unbegrenzte Fläche wählt man für die Untergrenze ein Variable.

Nach rechts unbegrenzt: $\int_{fest}^z f(x) dx$

Nach links unbegrenzt: $\int_z^{fest} f(x) dx$

Für immer größere bzw. kleiner Werte für z könnte nun das Integral berechnet werden. Umso extremer z gewählt ist, umso genauer ist der Wert. Bei der Untersuchung von unbegrenzten Flächen auf einen Inhalt untersucht man die Integrale mit einer variablen und einer festen Grenze folglich auf einen Grenzwert für $z \rightarrow \pm \infty$ bzw. für $z \rightarrow c$, falls f für $x = c$ eine Definitionslücke hat.

Existieren die Grenzwerte, schreibt man

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{fest}^z f(x) dx = \int_{fest}^{\infty} f(x) dx,$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^{fest} f(x) dx = \int_{-\infty}^{fest} f(x) dx,$$

$$\lim_{z \rightarrow c} \int_{fest}^c f(x) dx = \int_{fest}^c f(x) dx, \text{ oder}$$

$$\lim_{z \rightarrow c} \int_c^{fest} f(x) dx = \int_c^{fest} f(x) dx$$

Integral und Rauminhalt

Mit Integralen können neben Flächeninhalten auch Rauminhalte von Körpern bestimmt werden, insbesondere von Rotationskörpern. Diese entstehen, wenn die vom Graphen einer Funktion f über dem Intervall $[a; b]$ eingeschlossene Fläche um die x -Achse rotiert.

Gegeben. Ist eine Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$. Rotiert die Fläche unter dem Graphen von f über $[a; b]$ um die x -Achse, so entsteht ein Rotationskörper.

Sein Volumen V beträgt $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Mittelwert von Funktionen

Der Begriff des Mittelwertes \bar{m} von n Zahlen n_1, n_2, \dots, n_z ist so festgelegt:

$\bar{m} = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$. Mit Funktionen über das Intervall $[a; b]$ kann auch ein Mittelwert beschrieben werden. Dabei wird die Gesamtänderung einer Größe (das Integral) durch die Länge des betrachteten Integrals geteilt. Dies entspricht der korrekt gewichteten Mittelwertbildung beliebig vieler und beliebig kleiner Rechtecke entsprechend der Definition des Integrals.

Die Zahl $\bar{m} = \frac{a}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ heißt Mittelwert der Funktion f auf $[a; b]$.

Produktintegration

Nicht prüfungsrelevant,

Integration durch Substitution

Nicht prüfungsrelevant.

Regeln für ganzrationale Funktionen

Um eine Stammfunktion F zu bestimmen, muss man „rückwärtz ableiten“, damit $F'(x) = f(x)$.

„Umgekehrte“ Potenzregel

$$f(x) = F'(x) = a^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} * a^{n+1}$$

Regeln für Exponentialfunktionen

Um eine Stammfunktion F zu bestimmen, muss man „rückwärtz ableiten“, damit $F'(x) = f(x)$.

Funktionsanalyse

Nullstellen

Als Nullstelle einer Funktion f sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x -Achse definiert.

Die Nullstellen sind durch $f(x) = 0$ definiert. Die Gleichung ist nach x aufzulösen, um alle Nullstellen zu erhalten.

Schnittpunkt mit der y -Achse

Es ist $f(0)$ zu berechnen.

Extremstellen

Als Extremstellen werden die Stellen bezeichnet, wo f maximale oder minimale Werte hat. Dies kann sich auf die gesamte Funktion beziehen. Dann spricht man vom globalen Minimum oder Maximum. Meistens (wie auch im Folgenden) werden allerdings nur Aussagen über die lokalen Eigenschaften gemacht. Man spricht vom lokalen Minimum/Maximum.

Notwendiges Kriterium

Sei die Funktion f auf dem Intervall I definiert und differenzierbar.

Man löse die Gleichung $f'(x) = 0$, um Kandidaten für Extremstellen zu erhalten.

Hinreichendes Kriterium

Jeder dieser Kandidaten ist nun entweder mit dem Vorzeichenwechselkriterium (VZW) oder dem hinreichenden Kriterium zu überprüfen.

Wenn $f''(x) < 0$ ist, hat f an der Stelle x ein lokales Maximum $f(x)$. (Merkhilfe: 😞)

Wenn $f''(x) > 0$ ist, hat f an der Stelle x ein lokales Minimum $f(x)$. (Merkhilfe: 😞)

Gilt $f''(x) = 0$ so ist das VZW anzuwenden.

VZW

Wenn $+ \rightarrow -$ für f' an x , dann hat f an der Stelle x ein lokales Maximum $f(x)$.

Wenn $- \rightarrow +$ für f' an x , dann hat f an der Stelle x ein lokales Minimum $f(x)$.

Wenn f' an x keinen VZW hat, dann hat f an der Stelle x einen Sattelpunkt $S(x | f(x))$.

Achtung

Falls nach den Extrempunkten gefragt ist, sind auch noch alle $f(x)$ zu berechnen.

Wendestellen

Einfach: An Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten einer Funktion f .

Vollständig: Die Funktion f ist auf einem Intervall I definiert, zwei mal differenzierbar und x_0 ist im Intervall I . Eine Stelle x_0 , bei der der Graph von f von einer Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt, heißt Wendestelle von f . Der zugehörige Punkt $W(x_0 | f(x_0))$ heißt Wendepunkt des zugehörigen Graphen.

Wendestellen von f stellen einen Wechsel von einer steigenden zu einer fallenden Steigung oder umgekehrt dar. Somit werden Extremstellen von f' gesucht. Die Bedingungen für Extremstellen von f lassen sich übertragen auf Extremstellen von f' und somit auf Wendestellen von f .

Die Tangente im Wendepunkt heißt Wendetangente. Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt Sattelpunkt.

Notwendige Bedingung

Lösung der Gleichung $f''(x) = 0$ bestimmen, um mögliche Wendestellen zu finden.

Hinreichende Bedingung

Vergleiche Abschnitt für Extremstellen, wobei statt $f' f''$ und an Stelle von $f'' f'''$ betrachtet wird.

Ggf. y-Koordinate der Wendepunkte

Einsetzen der Wendestelle(n) in $f(x)$.

Symmetrie

Der Graph einer Funktion f wird meist bezüglich Achsensymmetrie zur y -Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung untersucht.

Das Kriterium für die Achsensymmetrie an der y -Achse ist $f(x) = f(-x)$.

Das Kriterium für die Punktsymmetrie am Ursprung ist $f(x) = -f(-x)$.

Nach Einsetzen einer Funktion ist die entstehende Gleichung auf Gültigkeit zu prüfen.

Grenzwertuntersuchung

Wird der Grenzwert für eine Funktion betrachtet, kann entweder eine Tendenz nach $\pm \infty$ oder eine Asymptote identifiziert werden. Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion immer stärker „anschmiegt“. Der Abstand zwischen der Asymptote und dem Graphen der Funktion wird dabei beliebig klein.

Der Grenzwert einer Funktion kann einfach bestimmt werden. Für zusammengesetzte Funktionen sind einige Vorab-Überlegungen sinnvoll.

Grundsätzlich gilt, dass Exponentialfunktionen stärker als Potenzfunktionen sind. Und Potenzfunktionen sind stärker als logarithmische Funktionen. Der Grenzwert oder die Asymptote einer Funktion wird immer dann deutlich, wenn der Grenzwert \lim für den Funktionstherm betrachtet wird. Der Grenzwert kann dabei sowohl $\pm \infty$ als auch eine Definitionslücke der Funktion sein.

Sätze

Monotoniesatz

Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f in diesem Intervall streng monoton wachsend bzw. steigend. Dies folgt aus der allgemeinen Bedingung, dass $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1 > x_2$.

Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, dann ist f in diesem Intervall streng monoton fallend bzw. sinkend. Dies folgt aus der allgemeinen Bedingung, dass $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$.

Der Monotoniesatz ist nicht umkehrbar. Ist die Funktion f in einem Intervall I also streng monoton steigend, muss NICHT für alle $x \in I$ folgendes gelten: $f'(x) > 0$. (Beispiel ist $f(x) = x^3$. Diese Funktion hat bei $x = 0$ einen Sattelpunkt mit $f'(0) = 0$, obwohl sie streng monoton steigend ist.)

An Extremstellen ändert sich das Monotonieverhalten einer Funktion f . Daraus resultiert das Vorzeichenwechselkriterium (VZW) für die Funktionsanalyse.

Weitere Aufgabentypen

Extremwertprobleme mit Nebenbedingung

Wird ein Extremwert für eine „Zielgröße“ in einer Anwendungssituation gesucht und man eine Funktion bestimmen kann, die dieses Maximum oder Minimum erreichen soll, spricht man von Extremwertproblemen mit Nebenbedingung.

Strategie für das Lösen von Extremwertproblemen mit Nebenbedingung

1. Beschreiben der Zielgröße, die extremal werden soll, durch eine Formel. Diese kann mehrere Variablen enthalten.
2. Aufsuche von Nebenbedingungen, die Abhängigkeit zwischen den Variablen enthalten.
3. Bestimmen der Zielfunktion, die nur noch von einer Variablen abhängt. Welche Variable zweckmäßig ist, zeigt oft erst die Bearbeitung. Angeben des Definitionsbereichs der Zielfunktion.
4. Untersuchen der Zielfunktion auf Extremwerte unter Beachtung der Ränder des Definitionsbereichs. Formulieren des Ergebnisses.

Zusammengesetzte Funktionen im Sachzusammenhang

Funktionen können als Modelle für Sachzusammenhänge verwendet werden. Somit werden Fragen des Sachzusammenhangs durch die Funktion beantwortbar. Bei der Arbeit mit Funktionen im Sachzusammenhang müssen mehrere Aspekte berücksichtigt bzw. mehrere Schritte befolgt werden werden.

1. Zunächst ist entweder eine Funktion entsprechend des Sachzusammenhangs aufzustellen, falls noch nicht gegeben. Dabei müssen die Bedeutung von Funktionen, Größen und Variablen eindeutig definiert und verstanden werden.
2. Fragen im Sachzusammenhang müssen in eine mathematische Fragestellung übertragen werden.
3. Die mathematische Fragestellung kann mit bekannten Strategien und Kriterien beantwortet werden.
4. Die mathematische Antwort ist nun erneut in den Kontext des Sachzusammenhangs zu übertragen. Erneut ist auf die Bedeutung von Funktionen, Größen, Variablen etc. zu achten.

Wichtig: Formulierung eines Antwortsatzes!

Lineare Algebra

Die lineare Algebra ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Vektorräumen und linearen Abbildungen zwischen diesen beschäftigt. Dies schließt insbesondere auch die Betrachtung von linearen Gleichungssystemen und Matrizen mit ein.

Zunächst ist hervorzuheben, dass sich die folgenden Darstellungen meist auf den dreidimensionalen Raum, manchmal sogar auf den zweidimensionalen, beschränken. Das Konzept von Vektoren ermöglicht jedoch auch eine Darstellung in n -dimensionalen Räumen. Häufig müssen die eingeführten Konzepte einfach nur auf n Koordinaten ergänzt werden, damit diese auch auf andere Räume anwendbar werden.

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit zwei Variablen können mit bisherigen Verfahren gelöst werden. Das Gauß-Verfahren kann zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit n Variablen genutzt werden. Lineare Gleichungssysteme haben die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots + \quad \quad \quad \vdots + \quad \quad \quad \vdots + \quad \quad \quad \vdots = \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Das Gauß-Verfahren besteht aus zwei Arbeitsschritten:

1. Man bringt das LGS durch Äquivalenzumformungen auf Stufenform.
2. Man löst die Gleichungen der Stufenform schrittweise nach den Variablen $x_n; \dots; x_2; x_1$ auf.
Dazu beginnt man mit der untersten Gleichung mit einer Unbekannten. Die Lösung kann in die zweite Gleichung von unten eingesetzt werden, sodurch dort ebenfalls nur noch eine Variable vorhanden ist. Diese Methode setzt man jeweils für die nächst höhere Gleichung fort, bis das gesamte Gleichungssystem gelöst ist.

Ein LGS hat entweder genau eine Lösung oder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. In jedem Fall muss jedoch die Lösungsmenge mit einem 3-Tupel notiert werden.

Existiert genau eine Lösung schreibt man mit den entsprechenden Werten für $x_n; \dots; x_2; x_1$:

$$\mathbb{L} = \{(x_1; x_2; \dots; x_n)\}$$

Existieren unendlich viele Lösungen, z. B. weil das LGS unterbestimmt ist, schreibt man $x_n = t$ und gibt alle weiteren Variablen mit t an. Es folgt: $\mathbb{L} = \{(x_1; x_2; \dots; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Existiert keine Lösung, z. B. weil das LGS überbestimmt ist, ist die Lösungsmenge leer. Man schreibt: $\mathbb{L} = \emptyset$.

Äquivalenzumformung eines LGS

Zur äquivalenten Umformung eines LGS gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Zwei Gleichungen werden miteinander vertauscht.
- Eine Gleichung wird mit einer Zahl $c \neq 0$ multipliziert.
- Eine Gleichung wird durch eine Summe von ihr und einer anderen Gleichung ersetzt.

Das dreidimensionale Koordinatensystem

Ein dreidimensionales Koordinatensystem besteht aus einem ergänzten zweidimensionalen Koordinatensystem. Die x -Achse wird zur x_2 -Achse und die y -Achse wird zur x_3 -Achse. Die x_1 -Achse wird in einem Winkel von 135° zu diesen gezeichnet und verläuft vom Ursprung diagonal nach links unten. So soll ein räumlicher Eindruck erzeugt werden. Eine LE entlang der x_2 - und x_3 -Achsen entspricht zwei Kästchen des Papiers. Eine LE entlang der x_1 -Achse ist um den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ verkürzt und entspricht somit der Diagonale eines Kästchens.

Im dreidimensionalen Koordinatensystem sind sämtliche Darstellungen von Punkten, Geraden, Ebenen etc. nicht eindeutig. Durch die Projektion des dreidimensionalen Raumes auf eine zweidimensionale Darstellung werden unendlich viele verschiedene Punkte im Raum identisch abgebildet. Von einer Darstellung kann somit nicht eindeutig auf einen Punkt geschlossen werden.

Punkte

Ein Punkt wird in das dreidimensionale Koordinatensystem eingetragen, indem zunächst x_1 Schritte entlang der x_1 -Achse, dann x_2 Schritte entlang der x_2 -Achse und zum Schluss x_3 Schritte entlang der x_3 -Achse vom Ursprung aus verschoben werden.

Den Abstand von zwei Punkten kann man im zweidimensionalen Koordinatensystem mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen. Wenn man den Satz des Pythagoras zweimal anwendet, kann man auch im dreidimensionalen Koordinatensystem den Abstand von Punkten berechnen. Letztlich erhält man für den Abstand $d(A; B)$ zweier Punkte $A(a_1 | a_2 | a_3)$ und $B(b_1 | b_2 | b_3)$ den

$$\text{Abstand } d(A; B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Vektoren

Verschiebungen im Koordinatensystem können durch Vektoren beschrieben werden. Vektoren werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet, über die ein Pfeil gezeichnet ist. Man schreibt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } x_1 \text{ die Verschiebung entlang der } x_1\text{-Achse, } x_2 \text{ die Verschiebung entlang der } x_2$$

-Achse und x_3 die Verschiebung entlang der x_3 -Achse darstellt. Ein Vektor ist durch seine Länge und seine Richtung festgelegt. Da ein Vektor die Verschiebung von einem Ausgangspunkt zu einem Zielpunkt beschreibt, kann ein Vektor auch durch die Angabe eines Ausgangspunktes und eines Zielpunktes angegeben werden. Auch bei dieser Schreibweise zeichnet man einen Pfeil über

die jeweiligen Buchstaben. Für den Verbindungsvektor von A nach B gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

Setzt man einen Vektor im Ursprung an, kann man dadurch einen Punkt eindeutig festlegen. Einen Vektor vom Ursprung zu A nennt man Ortsvektor \vec{a} von A .

Die Länge eines Pfeiles, der den Vektor \vec{a} darstellt, nennt man Betrag des Vektors \vec{a} und schreibt hierfür $|\vec{a}|$. Der Betrag des Vektors entspricht dem Abstand von einem Ausgangspunkt zu einem Zielpunkt des Vektors und wird mit $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ berechnet.

Rechnen mit Vektoren

Addition

Wenn man zwei Verschiebungen hintereinander durchführt, ergibt sich wieder eine neue Verschiebung. Den zugehörigen Vektor erhält man durch Addition der beiden Verschiebungen. Es

$$\text{gilt: } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation

Wenn eine Verschiebung mehrfach durchgeführt wird, ergibt sich ebenfalls eine neue Verschiebung. Der sich ergebende Gesamtvektor kann als skalare Multiplikation des Ausgangsvektors mit der Anzahl der Verschiebungen aufgefasst werden. Es gilt:

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Durch den Spezialfall $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ wird der Gegenvektor von \vec{a} bezeichnet.

Linearkombination

Einen Ausdruck wie $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ nennt man Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} . Die Zahlen r , s und t heißen Koeffizienten. Wenn zwei Vektoren Vielfache voneinander sind, dann heißen sie kollinear. Die zugehörigen Pfeile sind parallel zueinander.

Skalarprodukt

Häufig ist von Interesse, ob zwei Geraden orthogonal zueinander sind. Die Richtungsvektoren geben darüber Auskunft, deswegen wird die Fragestellung mit Hilfe von Vektoren bearbeitet.

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} (\neq \vec{o})$ heißen zueinander orthogonal, wenn ihre zugehörigen Pfeile mit gleichem Anfangspunkt ebenfalls zueinander orthogonal sind. In Zeichen: $\vec{a} \perp \vec{b}$. Die Orthogonalität zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} kann mit Hilfe ihrer Koordinaten überprüft werden. Aus dem Satz des Pythagoras, welcher als Bedingung für Orthogonalität gilt, folgt:

Zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt der Term $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ der Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Man schreibt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Es gilt: Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind genau dann zueinander orthogonal, $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Für das Skalarprodukt von Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} gilt:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
2. $r \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (Assoziativgesetz)
3. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (Distributivgesetz)
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Vektorprodukt

In bestimmten Situationen muss ein Vektor bestimmt werden, welcher zu zwei anderen Vektoren

orthogonal ist. Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegeben, so erhält man aus den

Bedingungen $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$ ein LGS. Dieses kann so gelöst werden, dass

$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ gilt. \vec{c} mit $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ (lies: „a Kreuz b“) das Vektorprodukt von \vec{a} und \vec{b} .

Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und zu \vec{b} . Wenn die Vektoren \vec{a} und \vec{b} parallel sind, dann ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

Geraden

Mit Hilfe von Vektoren kann man sowohl Geraden in der Ebene als auch Geraden im Raum beschreiben. Jede Gerade g lässt sich durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} (r \in \mathbb{R})$ beschreiben. Der Vektor \vec{p} heißt Stützvektor. Er ist Ortsvektor zu einem Punkt P , der auf der Geraden g liegt. Der Vektor \vec{u} heißt Richtungsvektor. Ist gibt die Orientierung der Geraden g an. Setzt man in die Gleichung für g für r alle reellen Zahlen ein, dann erhält man die Ortsvektoren aller Punkte der Geraden g . Die Schreibweise $g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ bedeutet: Die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$.

Eine Gerade g kann durch mehrere Gleichungen beschrieben werden. Die Richtungsvektoren aller Gleichungen von äquivalenten Gleichungen müssen dabei kollinear sein. Zudem müssen die Punkte aller Stützvektoren auf der Geraden g liegen.

Zeichnen einer Geraden im Raum

Gegeben sei eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$.

1. Man zeichnet vom Ursprung aus einen Pfeil des Stützvektors \vec{p} ein.
2. Vom Endpunkt dieses Pfeils aus zeichnet man einen Pfeil des Richtungsvektors \vec{u} .

3. Man zeichnet die Gerade g , sodass der Pfeil von \vec{u} auf g liegt.

Ebenen

Ähnlich wie man mit Hilfe von Vektoren Geraden beschreiben kann, kann man auch Ebenen angeben. Dazu können verschiedene Darstellungsformen genutzt werden.

Eine Ebene kann folgendermaßen definiert sein:

- Eine Gleichung (Parameterform etc.)
- Drei unterschiedliche Punkte
- Ein Punkt und zwei nicht kollineare Vektoren
- Zwei unterschiedliche Punkte und ein Vektor, welcher nicht kollinear zum Verbindungsvektor der Punkte ist

Parameterform

Jede Ebene E lässt sich durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$ beschreiben. Der Vektor \vec{p} heißt Stützvektor. Er ist Ortsvektor zu einem Punkt P , der in der Ebene E liegt. Die Vektoren \vec{u} und \vec{v} heißen Spannvektoren. Sie geben die Orientierung der Ebene E an. Beide Spannvektoren dürfen nicht kollinear sein. Ansonsten ist eine Gerade und keine Ebene definiert. Setzt man in die Gleichung für E für r und s alle reellen Zahlen ein, dann erhält man die Ortsvektoren aller Punkte der Ebene E . Somit ist \vec{x} der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene. Die Schreibweise $E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ bedeutet: Die Ebene E mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.

Eine Ebene E kann durch mehrere Gleichungen beschrieben werden. Die Richtungsvektoren aller Gleichungen von äquivalenten Gleichungen müssen dabei in der Ebene E liegen. Zudem müssen die Punkte aller Stützvektoren in der Geraden E liegen.

Normalengleichung

Eine Ebene kann - anders als bei der Parameterform - auch durch einen Stützvektor \vec{p} und einen Vektor \vec{n} , der orthogonal zu Spannvektoren der Ebene ist, beschrieben werden. Einen solchen Vektor \vec{n} , der orthogonal auf der Ebene steht, nennt man Normalenvektor der Ebene E . Er wird häufig durch das Vektorprodukt aus den Spannvektoren ermittelt. Ein Normalenvektor ist dann zu allen Vektoren \vec{PX} mit den Punkten P und X der Ebene E orthogonal.

Ist \vec{n} ein Normalenvektor der Ebene E mit $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, dann liegt ein Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x} = \vec{OX}$ genau dann in E , wenn $\vec{x} - \vec{p}$ orthogonal zu \vec{n} ist. Daher ist $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ eine Gleichung der Ebene E . Man spricht von einer Normalengleichung.

Koordinatengleichung

Eine Ebene E kann auch durch eine Gleichung ohne Vektoren beschrieben werden. Durch ausmultiplizieren einer Normalengleichung erhält man $\vec{x} \cdot \vec{n} = d = \vec{p} \cdot \vec{n}$. Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ erhält man die Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ der Ebene E , wobei

$d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ eine reelle Zahl ist. Ist $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ eine Koordinatengleichung der Ebene E ,

so ist $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E .

Umformungen

To be completed. [missing]

Lagebeziehungen

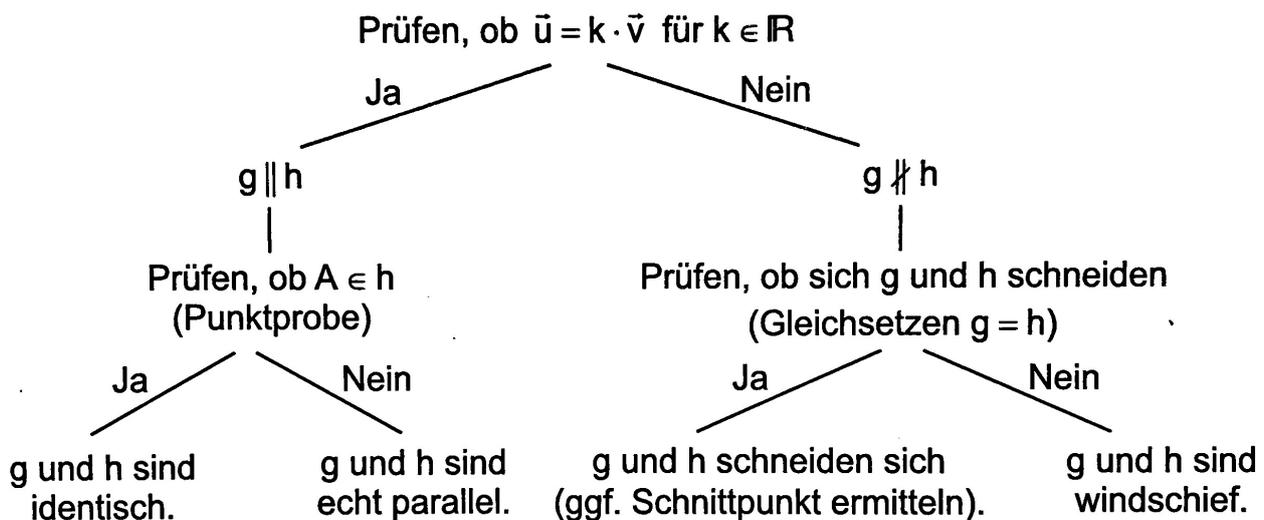
Gegenseitige Lage von Geraden

Zwei Geraden in der Ebene sind entweder zueinander parallel oder sie schneiden sich. Bei zwei Geraden im Raum kann zusätzlich der Fall eintreten, dass sie weder zueinander parallel sind noch gemeinsame Punkte besitzen. Solche Geraden heißen zueinander windschief.

Zwei Geraden g und h im Raum können:

- Sich schneiden. Sie besitzen einen gemeinsamen Punkt.
Die Richtungsvektoren sind nicht zueinander parallel. Die Geraden haben einen gemeinsamen Punkt. Sie schneiden sich.
- Zueinander parallel sein. Sie besitzen keine gemeinsamen Punkte.
Die Richtungsvektoren sind zueinander parallel. Die Geraden haben keine gemeinsamen Punkte. Sie sind zueinander parallel.
- Zueinander windschief sein. Sie besitzen keine gemeinsamen Punkte und sind nicht zueinander parallel.
Die Richtungsvektoren sind nicht zueinander parallel. Die Geraden haben keine gemeinsamen Punkte. Sie sind zueinander windschief.

So kann man bestimmen, wie zwei Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}; r \in \mathbb{R}$ und $h : \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}; s \in \mathbb{R}$ zueinander liegen:



Lagebeziehung Ebene Gerade

Eine Gerade g und eine Ebene E können:

- Sich schneiden. Sie besitzen einen einzigen gemeinsamen Punkt.
- Parallel sein. Sie besitzen keinen gemeinsamen Punkt.
- Ineinander liegen. Sie besitzen unendlich viele gemeinsame Punkte.

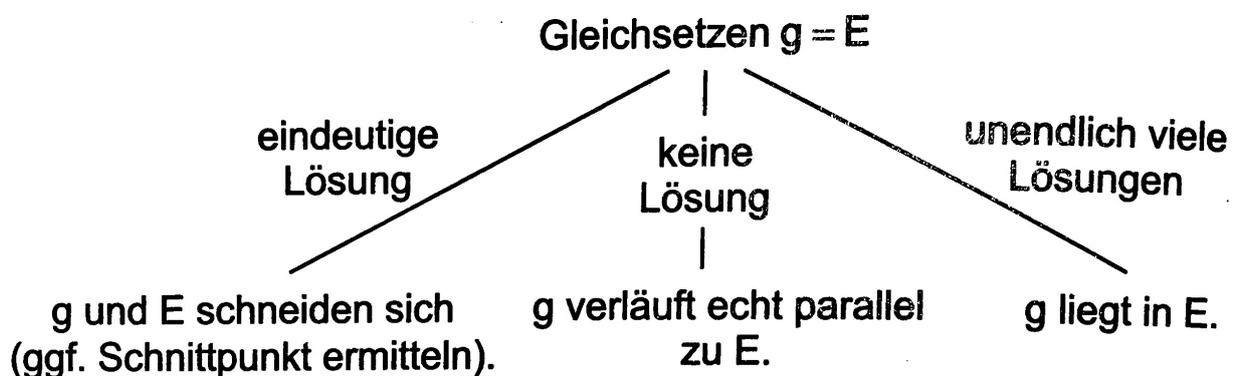
Die Lage und gegebenenfalls der Durchstoßpunkt von g und E können rechnerisch bestimmt werden. Die Methode hängt dabei von der Form der Ebenengleichung ab.

Parameterform

Gegeben ist eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$) und eine Ebene

$E : \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ ($r, s \in \mathbb{R}$). Es ist die Gleichung $\vec{p} + t \cdot \vec{u} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ aufzustellen und zu lösen. Falls sie...

- Genau eine Lösung hat, Schneiden sich die Gerade g und die Ebene E . Der Schnittpunkt ist durch die ermittelten Werte für t , r und s gegeben.
- Keine Lösung hat, sind die Gerade g und die Ebene E zueinander parallel.
- Unendlich viele Lösungen hat, liegt die Gerade g in der Ebene E .



Dieses Verfahren wird auch durch folgende Grafik verdeutlicht.

Koordinatenform

Gegeben sind eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$ mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und

eine Ebene $E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Es sind die Koordinaten von \vec{x} in Abhängigkeit von t in die Koordinatenform von E einzusetzen. Es ergibt sich:

$$a \cdot (p_1 + t \cdot u_1) + b \cdot (p_2 + t \cdot u_2) + c \cdot (p_3 + t \cdot u_3) = d.$$

- Falls diese Gleichung genau eine Lösung hat, schneiden sich die Gerade g und die Ebene E im durch den Wert für t definierten Punkt.
- Falls diese Gleichung keine Lösung hat, sind die Gerade g und die Ebene E zueinander parallel.
- Falls diese Gleichung unendlich viele Lösungen hat, liegt die Gerade g in der Ebene E .

Normalenform

Die einfachste Methode besteht in der Umformung der Normalen- in die Koordinatenform durch Ausmultiplizieren der Normalenform. Im Anschluss ist die Methode für die Koordinatenform zu betrachten.

Lagebeziehung Ebene Ebene

Zwei Ebenen können entweder identisch sein, parallel sein, sich in einer Schnittgeraden schneiden. Folgender Entscheidungsbaum kann bei der Analyse helfen:

- Die Normalenvektoren sind kollinear
 - Ja: parallel oder identisch
 - Ein beliebiger Punkt der einen Ebene liegt auch in der anderen Ebene
 - Ja: identisch
 - Nein: parallel
 - Nein: schneiden sich in einer Schnittgerade

Schneiden sich die beiden Ebenen in einer Schnittgerade ist häufig auch diese Schnittgerade zu ermitteln. Dazu gibt es mehrere Ansätze.

Ansatz 1 (zu favorisieren)

Eine Koordinaten einer Ebene in Parameterform werden in eine zweite Ebene in Koordinatenform eingesetzt. So kann die entstehende Gleichung so umgeformt werden, dass eine der beiden Variablen der Ebene in Parameterform in Abhängigkeit von der anderen Variable dieser Parameterform ausgedrückt werden kann. Somit wurde die Anzahl der Variablen auf eins reduziert und es ist eine Geradengleichung gegeben.

Ansatz 2

Gleichsetzen von zwei Parametergleichungen führt entweder zu unendlich vielen Lösungen oder keiner Lösung. Ist keine Lösung gefunden so sind die Ebenen parallel. Sind unendlich viele Lösungen gefunden sind die Ebenen entweder identisch oder schneiden sich in einer Geraden. Hängen alle vier Variablen nur von einer Variablen ab, schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgeraden. Können jedoch zwei Variablen beliebig variiert werden, sind die beiden Ebenen identisch.

Winkel

Winkel zwischen Vektoren

Zeichnet man zu einem gemeinsamen Anfangspunkt Pfeile zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die nicht zueinander parallel sind, so entstehen zwei Winkel. Den kleineren dieser beiden Winkel bezeichnet man als Winkel zwischen den Vektoren.

Wenn für zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gleich null ist, dann sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} zueinander orthogonal, das heißt, der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} beträgt 90° .

Über Zerlegung einer der Ortsvektoren und Anwendung des Cosinus, wird für den Winkel α zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} folgende Gleichung hergeleitet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \quad \text{mit} \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

Für α gilt somit: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

Schnittwinkel Gerade Gerade

Wenn zwei Geraden sich schneiden, entstehen vier Winkel, je zwei der Größe α ($\alpha \leq 90^\circ$) und je zwei der Größe $180^\circ - \alpha$. Unter dem Schnittwinkel zweier Geraden versteht man den Winkel, der kleiner oder gleich 90° ist. Sind \vec{u} und \vec{v} Richtungsvektoren der Geraden, dann kann man den Schnittwinkel α der Geraden mit der Formel $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

berechnen. Für α gilt somit: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$.

Schnittwinkel Ebene Ebene

Unter dem Schnittwinkel α zweier Ebenen E_1 und E_2 versteht man den Schnittwinkel zweier Geraden g und h , die in E_1 und E_2 liegen und orthogonal zur Schnittgeraden s der beiden Ebenen sind. Dieser Winkel ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 der Ebenen E_1 und E_2 . Deshalb kann man den Schnittwinkel α der E_1 und E_2 mit der Formel

$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ berechnen. Für α gilt somit:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right).$$

Schnittwinkel Gerade Ebene

Fällt man von jedem Punkt einer Geraden g das Lot auf die Ebene E , so erhält man in E eine Gerade g' (wenn g nicht orthogonal zu E liegt). Unter dem Schnittwinkel α der Geraden g und der Ebene E versteht man den Winkel zwischen den Geraden g und g' . Die Geraden g und g' und der Normalenvektor \vec{n} der Ebene E liegen in einer Ebene. Da der Normalenvektor \vec{n} orthogonal zu g' liegt, gilt die Gleichung $\beta = 90^\circ - \alpha$. Damit gilt: $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ mit $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Da zudem $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ gilt, folgt: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$. Für α gilt somit:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}\right).$$

Abstände

Neben den Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen können auch die Abstände dieser zueinander betrachtet werden.

Abstand Punkt Punkt

Der Abstand von zwei Punkten $P(p_1 | p_2 | p_3)$ und $Q(q_1 | q_2 | q_3)$ wird mit $|\overline{PQ}|$ oder $|\overrightarrow{PQ}|$ bezeichnet und kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

Sie lässt sich durch die mehrfache Anwendung des Satzes von Pythagoras herleiten.

Abstand Punkt Ebene

Eni Punkt R , der nicht in der Ebene E liegt, hat verschiedene Entfernungen zu Punkten der Ebene. Die kleinste dieser Entfernungen nennt man den Abstand des Punktes R von der Ebene E . Dieser Abstand ist die Länge d des Lotes von R auf E , das heißt die Länge der Strecke vom Punkte R zum Lotfußpunkt F . Um die Koordinaten des Lotfußpunktes F zu berechnen, schneidet man die Lotgerade g mit der Ebene E . Ein möglicher Richtungsvektor der Lotgeraden ist der

Normalenvektor der Ebene E (ggf. mittels des Vektorproduktes aus den Spannvektoren ermitteln), als Stützvektor kann man den Ortsvektor des Punktes R verwenden.

Wenn der Punkt R mit dem Ortsvektor \vec{r} und die Ebene E mit den Normalenvektor \vec{n} gegeben sind, kann man den Abstand d des Punktes R von der Ebene E so bestimmen:

1. Aufstellen einer Gleichung der zu E orthogonalen Geraden g durch R , z. B. $g : \vec{x} = \vec{r} + t \cdot \vec{n}$.
2. Berechnen der Koordinaten des Lotfußpunktes F der Lotgeraden g mit der Ebene E .
3. Berechnen des Betrags des Vektors \overrightarrow{RF} . Für den Abstand gilt: $d = |\overrightarrow{RF}|$.

Abstand Punkt Gerade

Wie beim Abstandsproblem Punkt-Ebene versteht man unter dem Abstand eines Punktes R von einer Geraden g die kleinste Entfernung von R zu g . Wenn F der Geradenpunkt mit der kleinsten Entfernung zum Punkt R ist, dann ist der Vektor \overrightarrow{FR} orthogonal zur Geraden g und die Länge des Vektors \overrightarrow{FR} ist gleich dem Abstand des Punktes R von der Geraden g . Um den Punkt F zu erhalten gibt es primär zwei Möglichkeiten. Dabei gilt grundsätzlich:

Gerade $g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$) mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und Punkt $R(r_1 | r_2 | r_3)$ mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Hilfsebene

- Man stellt die Hilfsebene E auf, die orthogonal zur Geraden g ist und in der R liegt. Es folgt: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = \vec{u} \cdot \vec{r}$.
- Man berechnet den Schnittpunkt F der Geraden g mit der Hilfsebene E .
- Nun ist der Betrag des Vektors $|\overrightarrow{FR}|$ als Abstand d zu ermitteln.

(b) Orthogonalität

- Man erzeugt den allgemeinen Geradenpunkt $F_t(p_1 + t \cdot u_1 | p_2 + t \cdot u_2 | p_3 + t \cdot u_3)$ auf.

Aus der Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{FR} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} r_1 - (p_1 + t \cdot u_1) \\ r_2 - (p_2 + t \cdot u_2) \\ r_3 - (p_3 + t \cdot u_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$ erhält man

eine Gleichung, welche nach t aufgelöst werden kann:

$$(r_1 - (p_1 + t \cdot u_1)) + (r_2 - (p_2 + t \cdot u_2)) + (r_3 - (p_3 + t \cdot u_3)) = 0$$

- Mit der Lösung für t kann der Punkt F berechnet werden.
- Nun ist der Betrag des Vektors $|\overrightarrow{FR}|$ als Abstand d zu ermitteln.

Abstand Gerade Gerade

Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ ($s \in \mathbb{R}$) und $h : \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ ($t \in \mathbb{R}$) versteht man die kleinste Enternung zwischen den Punkten von g und den Punkten von h . Dieser kann ähnlich wie der Abstand eines Punktes zu einer Geraden auf verschiedene Arten bestimmt werden.

(a) Hilfsebene

Mit dieser Methode kann der Abstand der beiden Geraden gestimmt werden, aber nicht der Lotfußpunkt. Somit ist diese Methode grundsätzlich nicht zu wählen.

(b) Orthogonalität

Es seien $G_s(p_1 + s \cdot u_1 | p_2 + s \cdot u_2 | p_3 + s \cdot u_3)$ und $H_t(q_1 + t \cdot v_1 | q_2 + t \cdot v_2 | q_3 + t \cdot v_3)$ Punkte auf den Geraden g bzw. h . \overline{GH} sei die kürzeste Verbindung zwischen den Geraden g und h . Deshalb ist \overline{GH} sowohl das Lot vom Punkt G auf die Gerade h als auch das Lot vom Punkt H auf die Gerade g . Man sagt, die Strecke \overline{GH} ist das gemeinsame Lot der windschiefer Geraden g

und h . Für die Lotfußpunkte G und H gilt: $\overrightarrow{GH} \perp g$ und $\overrightarrow{GH} \perp h$. Um den Abstand der windschiefen Geraden g und h zu berechnen, bestimmt man diese Punkte G und H .

Aus den gerade genannten Orthogonalitäten folgt, dass der Vektor $\overrightarrow{G_s H_t}$ orthogonal zum Richtungsvektor \vec{u} der Geraden g und zum Richtungsvektor \vec{v} der Geraden h . Daraus folgt das LGS (1) $\overrightarrow{G_s H_t} \cdot \vec{u} = 0$ und (2) $\overrightarrow{G_s H_t} \cdot \vec{v} = 0$.

Als Lösung dieses LGS erhält man, falls das LGS gültig ist, Werte für s und t . Mit diesen können G und H sowie deren Abstand d , welcher als Abstand beider Geraden zu interpretieren ist, bestimmt werden.

Abstand Gerade Ebene

Sind eine Gerade und eine Ebene parallel (nicht identisch), kann ihr Abstand berechnet werden. Dazu kann der Abstand eines beliebigen Punktes der Gerade von der Ebene ermittelt werden. Denn schließlich ist bei Parallelität einer Geraden und einer Ebenen der Abstand zwischen beiden an jeder Stelle entlang der Geraden identisch.

Abstand Ebene Ebene

Sind zwei Ebenen parallel (nicht identisch), kann ihr Abstand berechnet werden. Dazu kann der Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene von der anderen Ebene ermittelt werden. Denn schließlich ist bei Parallelität zweier Ebenen der Abstand zwischen beiden Ebenen an jeder Stelle beider Ebenen identisch.

Stochastik

Grundlagen

Zunächst ist zwischen relativer und absoluter Häufigkeit zu unterscheiden. Absolute Häufigkeit beschreibt die Anzahl, wie häufig ein Element einer Urliste gezählt wurde. Relative Häufigkeit beschreibt nun den Anteil dieser Anzahl an der Gesamtmenge der Listenelemente.

Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sind zu unterscheiden. Man kann jedoch von relativen Häufigkeiten auf Wahrscheinlichkeiten schließen.

Des Weiteren ist zwischen Ergebnis und Ereignis zu unterscheiden. Bei einem Zufallsexperiment ist ein Ergebnis ein möglicher Pfad in einem Baumdiagramm. Ein Ereignis ist durch ein allgemeines Kriterium definiert und kann mehrere Pfade einschließen.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der des Gegenereignisses. Das Gegenereignis von x wird als $\bar{x} = 1 - x$ definiert.

Baumdiagramm

In einem Baumdiagramm können Zufallsexperimente dargestellt werden. Ausgehend vom obersten Knoten werden für die verschiedenen Möglichkeiten Striche zu weiter unten und in einer Ebene liegenden Knoten gezeichnet. An diese Knoten werden die Wahrscheinlichkeiten geschrieben. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis wird mit der Pfadregel (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades) berechnet. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis wird mit der Summenregel (Addition der Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse) berechnet.

Laplace Experiment

Ein Laplace Experiment zeichnet sich dadurch aus, dass es zwei mögliche Ergebnisse gibt, welche beide gleich wahrscheinlich sind.

Daten darstellen und Kenngrößen beschreiben

Befor man die Realität durch Wahrscheinlichkeitsmodelle beschreibt, muss man sie durch Messen und Zählen erfassen. Die dabei anfallenden Daten kann man grafisch visualisieren und durch die Kenngrößen Mittelwert und Standardabweichung beschreiben.

Sei eine Urliste $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ gegeben. Die zugehörigen Kenngrößen sind:

Der Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ und

die empirische Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)}$.

Wenn eine relative Häufigkeitsverteilung mit den Werten $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ und den relativen Häufigkeiten $h_1, h_2, h_3, \dots, h_k$ vorliegt, so gilt auch:

$\bar{x} = m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2 + m_3 \cdot h_3 + \dots + m_k \cdot h_k$ und

$s = \sqrt{(m_1 - \bar{x})^2 \cdot h_1 + (m_2 - \bar{x})^2 \cdot h_2 + \dots + (m_k - \bar{x})^2 \cdot h_k}$

Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen

Analog zum Mittelwert \bar{x} und der empirischen Standardabweichung s bei Häufigkeitsverteilungen werden entsprechende theoretische Kenngrößen für Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert. Sie werden Erwartungswert μ (lies Mü) und Standardabweichung σ (lies Sigma) genannt. Sie ermöglichen eine Prognose der empirischen Kenngrößen \bar{x} und s .

Ein Erwartungswert von X , der als $\mu(x)$, kurz μ , bezeichnet wird, gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsexperiments zu erwarten ist. Er ist also eine Prognose für den Mittelwert.

Für die empirische Standardabweichung s wird analog eine theoretische Standardabweichung σ festgelegt, welche die Streuung der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Erwartungswert μ beschreibt und eine Prognose für die Standardabweichung s darstellt.

Für eine Zufallsgröße X mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_n definiert man folgende Kenngrößen:

Erwartungswert von X : $\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$

$$\text{Standardabweichung von } X: \sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)}$$

Falls die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X angegeben ist, spricht man auch von dem Erwartungswert und der Standardabweichung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung. Erwartungswert und Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung sagen den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der zu erwartenden Häufigkeitsverteilung voraus.

Gauß'sche Faustregel

Nach einer groben Faustregel weichen bei zufälligen Messfehlern ca. 68,3 % der Messwerte höchstens um die Standardabweichung s vom Mittelwert \bar{x} ab, sie liegen also im Standardabweichungs-Intervall (s -Intervall) $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$ mit dem Mittelpunkt \bar{x} . Der zu Grunde liegende Grenzwertsatz kann in der Schule nicht bewiesen werden. Der Satz von De Moivre-Laplace, ein Spezialfall, wird jedoch eingeführt.

| Sigma | Wahrscheinlichkeit |
|--------------|--------------------|
| 1σ | 68,3 % |
| 2σ | 95,4 % |
| 3σ | 99,7 % |
| $1,64\sigma$ | 90 % |
| $1,96\sigma$ | 95 % |
| $2,58\sigma$ | 99 % |

Wenn die Intervallgrenzen ganzzahlig sind, berücksichtigt man nur die ganzen Zahlen im Inneren.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\text{-Gesetz}$$

Nicht prüfungsrelevant, meine ich.

Durch Mittelwertbildung aus n Messwerten verkleinert sich die Standardabweichung und damit das 68,3 % -Intervall mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Kurz: Vervierfachung des Stichprobenumfangs halbiert

die Messungenauigkeit.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Voraussetzung: Es gibt zwei verschiedene Merkmale (meist in jeweils zwei Ausprägungen).

$P_A(B) = P(B|A)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit für B , wenn A bereits eingetreten ist. Es gilt:

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Vierfeldertafel

| | | | |
|-----------|---------------------|---------------------------|--------------|
| | A | \bar{A} | |
| B | $P(A \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| \bar{B} | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ |
| | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | 1 |

Bernoulli

Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung

Man spricht von Bernoulli-Experimenten, wenn bei einem Zufallsexperiment nur zwei Ergebnisse wie „Erfolg“ bzw. „Treffer“ (kurz „1“) oder „Misserfolg“ bzw. „Niete“ (kurz „0“) interessieren. Wenn man ein Bernoulli-Experiment n Mal wiederholt, sodass die Durchführungen voneinander unabhängig sind, spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n . Die Zufallsgröße X zählt die

Anzahl der Erfolge. Ihre Werte liegen zwischen 0 und n . Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung kann berechnet werden.

Eine Brounoulli-Kette der Länge n besteht aus n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit den Ergebnissen 1 („Treffer“) und 0 („Niete“). Beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer und ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für r Treffer mit Hilfe der Bernoulli-Formel:

$$B_{n,p}(r) = P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}; r = 0, \dots, n$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $B_{n,p}$ heißt Binomialverteilung. Die Zufallsgröße X heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p .

$p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$ berechnet die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad, der zu dem Ereignis $X = r$ gehört. Mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ kann die Anzahl der Pfade für das Ereignis $X = r$

berechnet werden. Der Binomialkoeffizient kann berechnet werden mit

• dem GTR

• mit der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

• Mit dem Pascal'schen-Dreieck

Kumulierte Wahrscheinlichkeit

Neben der Wahrscheinlichkeit zur Trefferzahl r , $P(X = r) = B_{n,p}(r)$, kann auch die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq r)$, also die Summe

$P(X = 0) + \dots + P(X = r) = F_{n,p}(r) = \sum_{i=0}^r B_{n,p}(i)$, berechnet werden. Mit der kumulierten

Wahrscheinlichkeit kann man nach der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten gewisser Wertebereiche von X fragen. $F_{n,p}$ ist dabei als die kumulierte Wahrscheinlichkeit für eine Binomialverteilung $B_{n,p}$ definiert.

Für $P(X \geq r)$

gilt:

$$P(X = r) + \dots + P(X = n) = F_{n,p}(n) - F_{n,p}(r - 1) = 1 - F_{n,p}(r - 1) = \sum_{i=r}^n B_{n,p}(i)$$

$$\text{Für } P(m \leq X \leq r) \text{ gilt: } P(X = m) + \dots + P(X = r) = F_{n,p}(r) - F_{n,p}(m - 1) = \sum_{i=m}^r B_{n,p}(i)$$

Kenngößen der Binomialverteilung

Es gilt, dass der Erwartungswert einer Binomialverteilung $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung einer Binomialverteilung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ ist.

Praxis der Binomialverteilung

Mit den beiden Grundfunktionen der Wahrscheinlichkeit für eine Tefferzahl r und der kumulierten Wahrscheinlichkeit für einen Bereich von r , kann man alle Berechnungen bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X durchführen.

Auch bei der Untersuchung von Binomialverteilungen gelten Fausts Sigmaregeln als Annäherung.

Problemlösen mit der Binomialverteilung

In Gleichungen der Form $B_{n,p}(r) = P$ oder $F_{n,p}(r) = P$ kommen die vier Variablen n , p , r und P vor. Wenn man drei Variablen kennt, kann man die vierte exakt bestimmen oder näherungsweise aus Tabellen ablesen. So können praktisch relevante Probleme gelöst werden.

Von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen

Nicht prüfungsrelevant, meine ich.

..

Zweiseitige Signifikanztest

Bisher war bei Bernoulli-Versuchen die Trefferwahrscheinlichkeit p bekannt. Es gibt auch Situationen, in denen man p nicht kennt, aber eine Vermutung (Hypothese) zur Trefferwahrscheinlichkeit hat. Man glaubt an die Gültigkeit dieser Hypothese solange wie möglich. Man verwirft sie erst, wenn in einer Stichprobe Ergebnisse beobachtet werden, die bei Gültigkeit der Hypothese höchst selten (d.h. mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit) auftreten würden. Durch das Ziehen und Bewerten der Stichprobe wird die Hypothese getestet.

Bei einem zweiseitigen Signifikanztest ist die Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ definiert. Als Alternative wird $H_1 : p \neq p_0$ bezeichnet.

Zunächst legt man den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau α (z. B. $\alpha = 5\%$) fest. Als Testgröße X verwendet man die Trefferzahl für die Parameter n und p_0 .

Man bestimmt den Annahmebereich $[a; b]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}\%$, und die kleinste Zahl b , sodass $P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\%$, heraus. Die

Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. der Fehler erster Art beträgt somit höchstens $\alpha\%$. Alle Werte außerhalb des Annahmebereiches bilden den Ablehnungsbereich. Eine Annäherung des Annahmebereiches kann auch mit den Gauß'schen Faustregeln ermittelt werden.

Nun wird eine Stichprobe vom Umfang n durchgeführt. H_0 wird angenommen, wenn das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt, sonst wird H_0 verworfen und H_1 angenommen.

Einseitiger Signifikanztest

Wenn man bei einem Signifikanztest vorherein weiß, dass p höchstens größer oder kleiner geworden sein kann, testet man $H_0 : p = p_0$ gegen die Alternative $H_1 : p > p_0$ (rechtsseitig) oder $H_1 : p < p_0$ (linksseitig).

Bei einem linksseitigen Test liegt der Ablehnungsbereich von H_0 links vom Erwartungswert. Bei einem rechtsseitigen Test liegt der Ablehnungsbereich von H_0 rechts vom Erwartungswert.

Beim einseitigen Signifikanztest legt man zunächst den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau α (die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) fest. Als Testgröße X verwendet man die Trefferzahl.

Entsprechend dem speziellen Verfahren für den links- oder rechtsseitigen Test ermittelt man den Annahmebereich. Dann wird eine Stichprobe vom Umfang n erhoben. H_0 wird beibehalten wenn die Trefferzahl X im Annahmebereich liegt, sonst wird H_0 verworfen und H_1 angenommen.

Linksseitiger Test

Die Nullhypothese ist $H_0 : p = p_0$ oder $H_0 : p \geq p_0$. Die Alternative ist $H_1 : p < p_0$. Man bestimmt den Annahmebereich $[a; n]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > \alpha\%$.

Rechtsseitiger Test

Die Nullhypothese ist $H_0 : p = p_0$ oder $H_0 : p \leq p_0$. Die Alternative ist $H_1 : p > p_0$. Man bestimmt den Annahmebereich $[0; b]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl b heraus, sodass $P(X \leq b) \geq 1 - \alpha\%$.

Fehler bei Hypothesentests

Beim Testen mit Binomialverteilungen wird die Nullhypothese akzeptiert oder verworfen. Dabei können Fehlentscheidungen vorkommen. Wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist, spricht man von einem Fehler 1. Art. Wenn sie akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist, spricht man von einem Fehler 2. Art. Die Abbildung zeigt einen Überblick:

| | Nullhypothese wahr | Nullhypothese falsch |
|-------------------------|--------------------|-----------------------|
| Nullhypothese verworfen | Fehler 1. Art | Richtige Entscheidung |

| | | |
|--------------------------|-----------------------|---------------|
| Nullhypothese akzeptiert | Richtige Entscheidung | Fehler 2. Art |
|--------------------------|-----------------------|---------------|

Wenn man bei gegebenem Stichprobenumfang durch Vergrößerung des Annahmebereiches für H_0 den Fehler 1. Art verringert, steigt die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art. Nur wenn man den Stichprobenumfang vergrößert, kann es gelingen, die Wahrscheinlichkeit beider Fehler gleichzeitig zu verkleinern.

Fehler 1. Art (Irrtumswahrscheinlichkeit)

Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese zu verwerfen, obwohl sie zutrifft, nennt man Irrtumswahrscheinlichkeit. Sie entspricht der Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs für H_0 und beträgt höchstens dem Wert des Signifikanzniveaus α .

Fehler 2. Art (falsch positiv)

Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese zu akzeptieren, obwohl sie nicht zutrifft nennt man Fehler 2. Art. Sie hängt von dem Wahren Wert für p ab. Dieser kann jedoch nur hypothetisch vermutet werden.

Signifikanz und Relevanz

„Statistisch Signifikant“ bedeutet „vermutlich nicht zufällig“. Relevant bedeutet dagegen beachtlich, wichtig, bedeutsam, ... Also „einer Veröffentlichung würdig.“ Auch ernsthafte Wissenschaftler sind jedoch mitunter versucht, systematisch nach statistisch signifikanten Befunden zu suchen, weil nur solche Befunde veröffentlicht werden. Da Signifikanz nicht immer Relevanz gleicht, muss man bei der Interpretation statistischer Testergebnisse wachsam sein. Grundsätzlich sind folgende Strategien unzulässig:

- Es ist unzulässig aus mehreren Datenerhebungen i Nachhinein eine mit signifikantem Ergebnis auszuwählen.
- Es kann, im Hinblick auf signifikante Ergebnisse sinnlos sein, den Stichprobenumfang n so groß zu wählen, dass selbst kleine Unterschiede nachweisbar werden, die völlig irrelevant sind.

Normalverteilung

Stetige Zufallsgrößen

Neben ganzzahligen Zufallsgröße wie Trefferzahlen oder Punktsommen existieren auch reellwertige Zufallsgrößen X wie Zufallsdezimalzahlen, Körpergrößen, Geschwindigkeiten, Wartezeiten etc. Um solche stetigen Zufallsgrößen durch Wahrscheinlichkeiten beschreiben zu können, greift man auf Integrale zurück. Eine Funktion f , aus der man Wahrscheinlichkeiten durch Integration erhält, bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Funktionswerte $f(x)$ sind aber - anders als im diskreten Fall - keine Wahrscheinlichkeiten mehr. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X genau den Wert x annimmt, ist exakt null. Somit sind auch die Wahrscheinlichkeiten für offene und geschlossene Intervalle gleich: $P(r \leq X \leq s) = P(r < X < s)$.

Eine Funktion f heißt Wahrscheinlichkeitsdichte über einem Intervall I , wenn gilt:

$f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ und

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

Eine reellwertige Zufallsgröße X mit Werten im Intervall I heißt stetig verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f , wenn für alle r, s aus I gilt $P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$.

Eine Zufallsgröße X mit Werten zwischen a und b und der Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt den

Erwartungswert $\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$ und die

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx}$.

Die Berechnungsformeln für diese theoretischen Kenngrößen ergeben sich aus der Grenzwertbetrachtung der bereits bekannten Definitionen von Erwartungswert und Standardabweichung.

Gauß'sche Glockenform

Die Wahrscheinlichkeiten zufälliger Messfehler lassen sich durch die glockenförmige Wahrscheinlichkeitsdichte der Form $\phi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ beschreiben. μ bezeichnet die

wahre Größe und σ steht für die Messungengenauigkeit. Die Funktion wird Gauß'sche Glockenfunktion genannt.

Die Standardglockenfunktion lautet $\phi_{0;1}$. Durch Strecken, Stauchen und Verschieben kann man alle anderen Wahrscheinlichkeitsdichten aus der Standard-Glockenfunktion erzeugen.

Die Gauß'sche Glockenfunktion $\phi_{\mu;\sigma}$ mit $\phi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ besitzt eine Maximalstelle

bei $x = \mu$ und je eine Wendestelle bei $x = \mu \pm \sigma$. Ihr Graph ist Achsensymmetrisch zu $x = \mu$.

Weiterhin gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mu;\sigma}(x) dx = 1$ und $\int_a^b \phi_{\mu;\sigma}(x) dx = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \phi_{0;1}(x) dx$.

Das Maximum des Graphen von ϕ liegt bei $\mu = n \cdot p$. σ beträgt $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$.

Normalverteilung

Die Gauß'schen Glockenfunktionen dienen einerseits als Wahrscheinlichkeitsdichten reellwertiger Zufallsgrößen, andererseits beschreiben sie nach dem Satz von de Moivre-Laplace die Kontur von Binomialverteilungen und erlauben eine Begründung der Sigmaregeln bei der Binomialverteilung.

Eine stetige Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ , wenn sie eine Gauß'sche Glockenfunktion $\phi_{\mu;\sigma}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt. Zeichnet man ein Histogramm einer Binomialverteilung, wird deutlich, dass eine Glockenfunktion die Balken begrenzt. Da die Balken auf Grund einer konstanten Breite der Wahrscheinlichkeit entsprechen, begrenzt die Glockenfunktion die Wahrscheinlichkeiten. Folglich kann mit einem Integral entsprechend den Gesetzmäßigkeiten für stetige Zufallsgrößen die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Intervall berechnet werden.

Des Weiteren kann man zeigen, dass bei der Normalverteilung der Parameter μ der Erwartungswert und der Parameter σ die Standardabweichung ist.

Wie folgende Rechnung zeigt, gelten für Zufallsgrößen mit der Gauß'schen Glockenfunktion als Dichte die Sigmaregeln exakt:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \phi_{\mu;\sigma}(x) dx = \int_{-1}^1 \phi_{0;1}(x) dx \approx 0,683 \approx 68,3 \%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \phi_{\mu;\sigma}(x) dx = \int_{-2}^2 \phi_{0;1}(x) dx \approx 0,955 \approx 95,4 \%$$

Allgemein gilt der Satz von de Moivre-Laplace für binomialverteilte Zufallsgrößen X mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$:

$$P(X = k) = B_{n;p}(k) \approx \phi_{\mu;\sigma}(k) \text{ und}$$

$$P(a \leq X \leq b) \approx \int_{a-0,5}^{b+0,5} \phi_{\mu;\sigma}(x) dx.$$

Die Vergrößerung des Integrationsintervalls bezeichnet man als Stetigkeitskorrektur, die man verwendet, wenn mit der Gauß'schen Glockenfunktion ganzzahlige Zufallsgrößen beschrieben werden sollen.

Testen bei der Normalverteilung

Nicht prüfungsrelevant, meine ich.

Einen Hypothesentest führt man bei normalverteilten Zufallsgrößen ähnlich wie bei Binomialverteilten Zufallsgrößen durch. Wenn eine Zufallsgröße X normalverteilt ist mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ_x , dann sind auch die Mittelwerte \bar{x} aus jeweils n

beobachteten Werten normalverteilt mit dem gleichen Erwartungswert μ , aber der kleineren Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$.

Die Hypothese, dass eine normalverteilte Zufallsgröße mit bekannter Standardabweichung σ den Erwartungswert μ besitzt, testet man auf dem 5 %-Signifikanzniveau so:

Man wählt einen Stichprobenumfang n und berechnet den Mittelwert \bar{x} aus n Daten.

Man berechnet den Annahmehbereich $A = [\mu - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.

Man verwirft die Hypothese, wenn \bar{x} außerhalb des Annahmehereichs liegt.

Stochastische Prozesse

Stochastische Prozesse

Es gibt Mehrstufen Zufallsvorgänge, bei denen eine Beschreibung durch Baumdiagramme zu umfangreich oder unmöglich wird, weil sich die Stufenzahl nicht nach oben begrenzen lässt („unendliche Prozesse“). Oft gelingt es aber, bei diesen Zufallsvorgängen endlich viele Zustände festzulegen, zwischen denen das System zufällig „pendelt“. Grafisch lassen sie sich dann als zufällige Irrfahrt zwischen den Knoten eines Netzes, des Prozessdiagramms, deuten.

Für ein Prozessdiagramm gilt:

- Bei jedem Zustand ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den abgehenden Pfeilen gleich 1.
- Endzustände erkennt man an einem Ringpfeil mit der Übergangswahrscheinlichkeit 1. Da man sie nicht mehr verlassen kann, nennt man solche Zustände absorbierend. Die anderen Zustände nennt man innere Zustände.
- Jeder Beobachtungsserien entspricht ein Pfad (= Kette von Pfeilen): Die Pfadwahrscheinlichkeit wird so bestimmt, indem man alle Wahrscheinlichkeiten längst des Pfades multipliziert.
- Eine Zustandverteilung gibt an, wie wahrscheinlich die verschiedenen Zustände bei einem bestimmten (Zeit)Schritt sind.

Die Folge der Zustandsverteilungen, die zu einem Prozessdiagramm gehören, wird als stochastischer Prozess bezeichnet. Aus einer Zustandsverteilung kann man die folgende Verteilung mit Hilfe einer Berechnungsvorschrift aus linearen Gleichungen berechnen, deren Koeffizienten man dem Prozessdiagramm entnimmt.

Stochastische Matrizen

Bei einem stochastischen Prozess werden Zustandsverteilungen als Zustandsvektoren zusammengefasst. Die Berechnungsvorschrift für die Folgeverteilung \vec{v}_{k+1} einer gegebenen Zustandsverteilung \vec{v}_k wird mit Hilfe der Übergangsmatrix U kurz dargestellt als $\vec{v}_{k+1} = U \cdot \vec{v}_k$. Eine Übergangsmatrix eines stochastischen Prozesses enthält die Koeffizienten der linearen Gleichungen zur Berechnung des nächsten Schritts. Sie lässt sich direkt aus dem Zustandsdiagramm ablesen, ohne dass man die Berechnungsvorschrift benötigt. In Spalte x und Zeile y der Übergangsmatrix steht die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von Zustand x in Zustand y .

Die Übergangsmatrix U eines stochastischen Prozesses hat folgende Eigenschaften:

1. U ist quadratisch, d. h. sie hat gleich viele Zeilen wie Spalten.
2. In der k -ten Spalte stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man vom k -ten Zustand aus die übrigen Zustände erreicht.
3. Die Spaltensummen von U haben den Wert 1.

Eine Matrix mit solchen Eigenschaften nennt man auch stochastische Matrix.

Um eine Matrix mit einem Vektor zu multiplizieren, bildet man die Skalarprodukte der einzelnen Matrixzeilen mit dem Vektor.

Vektor-Matrix Multiplikation

Ein Vektor \vec{v} kann mit einer Matrix M multipliziert werden, indem für jeden Eintrag von \vec{v}_{neu} mit $\vec{v}_{neu} = M \cdot \vec{v}$ das Skalarprodukt der jeweiligen Zeile von M mit \vec{v} berechnet wird.

Matrizenmultiplikation

Da $\vec{v}_n = U \cdot (U \cdot (\dots \cdot \vec{v}_0)) = (U \cdot U \cdot \dots) \vec{v}_0 = U^n \cdot \vec{v}_0$, ist zu überlegen, wie die Potenzmatrix U^n berechnet werden kann. Allgemein gilt, für zwei Matrizen A und B heißt C mit $C = A \cdot B$ die Produktmatrix. C hat so viele Zeilen wie A und so viele Spalten wie B . Ein Eintrag in Zeile x und Spalte y wird dabei, durch das Skalarprodukt von Zeile x von A mit Spalte y von B berechnet. In der Anwendung vereinfacht der Taschenrechner die Rechnung, falls gegeben.

Grenzverhalten

Es gibt stochastische Prozesse, bei denen sich die Zustandverteilung mit der Zeit stabilisieren. Man sagt, dass sich die Folgeverteilung \vec{v}_n für $n \rightarrow \infty$ der Grenzverteilung \vec{g} nähert.

Neben der Grenzverteilung gibt es auch eine Grenzmatrix G . Mit der Grenzmatrix kann man zu einer beliebigen Startverteilung sofort die Grenzverteilung bestimmen.

Wenn sich die Potenzen U^n der Übergangsmatrix bei einem stochastischen Prozess für $n \rightarrow \infty$ einer Grenzmatrix G nähern, dann kann man zu jeder Startverteilung \vec{v}_0 die Grenzverteilung $\vec{g} = G \cdot \vec{v}_0$ berechnen. Außerdem gilt für jede Grenzverteilung $U \cdot \vec{g} = \vec{g}$.

Wenn es eine Grenzmatrix gibt, so kann man sie näherungsweise mit Hilfe einer Matrixpotenz U^n bestimmen. Dabei wählt man n so groß, dass sich z. B. beim Runden auf drei Dezimalstellen die Werte von $U^{\frac{n}{2}}$ nicht ändern, wenn man zu U^n übergeht.