$\mathbb{R}$, Euclidean Spaces,$\mathbb{C}$

Reelle Zahlen

grundlegende Eigenschaften

$\mathbb{Q}$ ist in vielen Situationen nicht ausreichend. Z. B.:

Theorem 1.1.1, Lindemann 1882: Es gibt keine Gleichung der Form $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ so dass $x = \pi$ eine Lösung ist.
Wir definieren nun reelle Zahlen mit zwei Opertationen:

- addition: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- multiplication: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

und der totalen Ordnung $\leq$. ($a > b \Leftrightarrow a \geq b, a \neq b$)

Theorem 1.1.2: $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist.
Die Neutralelemente sind 0 und 1. Dies beinhaltet die Axiome: Assoziativität, Neutralelement, inverses Element, und Kommutativität (für $+$ and $\cdot$). Es gilt Distributivität. Ferner ist die Ordnung total: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, total. Angeordnet bedeutet: Kompatibilität der Ordnung mit Axiomen:

- (K1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$
- (K2) $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

$\mathbb{Q}$ genügt bisherigen Axiomen (1.1.5). Wir fügen hinzu: Ordnungsvollständigkeit. $A, B \subseteq \mathbb{R}$ (V1): $A \neq \varnothing \neq B$. (V2): $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. - $(V1) \wedge (V2) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall a \in A, b \in B, a \leq c \leq b$.

Corollary 1.1.6:

1. Eindeutigkeit additiver/multiplikativer Inverse
2. $0 \cdot x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $(-1) \cdot x = -x, \forall x \in \mathbb{R}$
4. $y \geq 0 \Leftrightarrow -y \leq 0$
5. $y^2 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$
6. $x \leq y, u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$
7. $0 \leq x \leq y, 0 \leq u \leq v \Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$

Corollary 1.1.7: Script: Let $x \in \mathbb{R}, x > 0, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y \leq n \cdot x$ | Lecture: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$

Theorem: $\mathbb{Q}$ genügt nicht Vollständigkeit, da $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ as 1.1.8.

Theorem 1.1.8: For jedes $t \geq 0, t \in \mathbb{R}, x^2 = t$ hat eine Lösung in $\mathbb{R}$. Notice: Solution unique, denoted $\sqrt{t}$.
We say that $\mathbb{R}$ is unique as an isomorphism between any two sets, which validate $\mathbb{R}$'s axioms, exists. Also, $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$. So, for $x < y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$.

Definition 1.1.9: Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & y \leq y \\ y, & x \leq y \end{cases}$
2. $\min\{x, y\} = \begin{cases} y, & y \leq x \\ y, & x \leq y \end{cases}$
3. $|x| := \max\{x, -x\}$ (Absolutbetrag)

Corollary:

- $|x - y|$ with $x, y \in \mathbb{R}$ - distance of x, y
- $x \leq |x|, -x \leq |x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$

Theorem 1.1.10:

- $|-x| = |x| \geq 0, x \in \mathbb{R}$
- $|xy| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (Dreiecksungleichung)
- $|x + y| \geq ||x| - |y||, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Definition Unendlichkeit: $-\infty < x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$

Definition Intervalle:

- $a \leq b \in \mathbb{R}$
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
  - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
  - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
  - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- $a \in \mathbb{R}$
  - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$
  - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$
  - $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | a \geq x\}$
  - $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | a > x\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

$[a, b]$: abgeschlossen/kompakt - $]a, b[$: offen
unten/oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists x, \forall y \in A, x < y$ / $y > x$, beschränkt $\Leftrightarrow$ oben/unten beschränkt
Man kann mit Intervallen Werte approximieren:

- $]a - x, a + x[= \{y \in \mathbb{R} | |a - y| < x\}$
- $[a - x, a + x] = \{y \in \mathbb{R} | |a - y| \leq x\}$

Schranken, Supremum, Infimum

Definition 1.1.12: $A \subset \mathbb{R}$

- $c \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A - $\forall a \in A : a \leq c$
- $c \in \mathbb{R}$ untere Schranke von A - $\forall a \in A : c \leq a$
- $m \in \mathbb{A}$ Maximum von A - m obere Schranke
- $m \in \mathbb{A}$ Minimum von A - m untere Schranke

$\exists$ obere/untere Schranke: nach oben/unten beschränkt
Maximum von A: $\max A$ & Minimum von A: $\min A$

Theorem 1.1.15: $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$

- A oben beschränkt: $\exists$ kleinste obere Schranke: Supremum von A - $c := \sup A$
- A unten beschränkt: $\exists$ größte untere Schranke: Supremum von A - $d := \inf A$

Aussage äquivalent zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Corollary 1.1.16: $A \subset B \subset \mathbb{R}$. B nach oben beschränkt: $\sup A \leq \sup B$. A nach unten beschränkt: $\inf B \leq \inf A$.
Wenn A nicht oben/unten beschränkt: $\sup A = +\infty$/$\inf A = -\infty$. Wenn max/min existiert, dann $\max = \sup, \min = \inf$.

Showing $\sup A = c$
Test if $c = \max A$. Else, test $\forall a \in A, a \leq c$ & for $x < c$ find $a \in A, x < a < c$.
Analogously for $\inf A = d$.

Definition 1.1.18:

1. X, Y gleichmächtig, $\exists$ bijection $f : X \to Y$ - $X \sim Y$
2. X endlich, wenn $X = \varnothing$ (Kardinalität card$X = 0$) or $\exists n \in \mathbb{N}, X \sim \{1, 2, 3, ..., n\}$ (card$X = n$)
3. X abzählbar, wenn endlich oder $X \sim \mathbb{N}$

Theorem 1.1.20, Cantor: $\mathbb{R}$ nicht abzählbar

Euklidische Räume

Nicht weiter betrachtet.

Komplexe Zahlen

$+ : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
$\cdot : (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Theorem 1.3.1: $\mathbb{R}^2$ mit $+, \cdot$ ist kommutativer Körper mit $1_\mathbb{C} = (1, 0), 0_\mathbb{C} = (0, 0)$.
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit $x \mapsto (x, 0)$. Bemerke $i^2 = (0, 1)^2 = -(1, 0)$

Division: $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}$
Notation: $z = x + yi$, $x = Re\ z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = Im\ z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
Definition von komplexer Konjunktion: $\overline{z} := x - yi$.

Theorem 1.3.2:

1. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1 \overline{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z\overline{z} = x^2 + y^2 = ||z||^2$

$\Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{||z||^2}$
Additionally, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$, $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
Also remember the polar form from Analysis. $a + bi$: $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \Theta \Rightarrow re^{\Theta i}$

Theorem 1.3.4, Fundamentalsatz der Algebra: $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0, a_j \in \mathbb{C}$. Then, $\exists z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ so that $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_3)$. (With multiplicity, n solutions to polynomial of degree n.)

Folgen & Reihen

Grenzwerte einer Folge

Definition 2.1.1: $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ Folge reeller Zahlen. a_n anstatt $a(n)$, bezeignet mit $(a_n)_{n\geq1}$ / $(a_n)_{n\geq0}$.

Lemma 2.1.3: $(a_n)_{n\geq1}$ eine Folge. Höchstens ein $l \in \mathbb{R}$ mit $\forall\epsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} | a_n \notin]l-\epsilon, l+\epsilon[\}$ finite.

Definition 2.1.4: $(a_n)_{n\geq1}$ konvergent falls $\exists l \in \mathbb{R}$ so dass $\forall\epsilon > 0$: $\{n \in \mathbb{N}^* | a_n \notin]l-\epsilon, l+\epsilon[\}$ endlich.
Als $\lim_{n\to\infty} a_n = l / a_n \to_{n\to\infty} l$/Grenzwert/Limes bezeichnet. Wenn nicht konvergent: divergent.
With "$A \subset \mathbb{N}$ endlich $\leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow n \notin A)$"

$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - l| < \epsilon$

ist äquivalent.
Bemerkung 2.1.5: Folge konvergent $\Rightarrow$ Folge beschränkt.

Vergleichsprinzip: If $(c_n) \to 0$ and $\forall n, 0 \leq |a_n| \leq c_n$, then $a_n \to 0$. Also if only for $n \geq$ some N.

Can be used for $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n!}, \frac{\cos(...)}{n}, 1 + \frac{1}{n}, ...$

Theorem 2.1.8: $(a_n)_\mathbb{N}, (b_n)_\mathbb{N}$, $a_n \to a$, $b_n \to b$

1. $(a_n + b_n) \to a + b$
2. $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
3. if $b_n \neq 0, b \neq 0$, then $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$
4. If $\exists K \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n, \forall n \geq K$, then $a \leq b$

Satz von Weierstrass & Anwendungen

Definition 2.2.1:

1. $(a_n)_\mathbb{N}$ monoton wachsend $\Leftarrow a_n \leq a_{n+1}, \forall n$
2. $(a_n)_\mathbb{N}$ monoton fallend $\Leftarrow a_{n+1} \leq a_n, \forall n$

Theorem 2.2.2:

- $(a_n)_\mathbb{N}$ monoton wachsend, nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- $(a_n)_\mathbb{N}$ monoton fallend, nach unten beschränkt $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Corollary 2.2.4: $(a_n)_\mathbb{N}$ konvergent, $k \in \mathbb{N}$, $b_n := a_{n+k} \Rightarrow b_n$ konvergent mit $b_n \to \lim a_n$.

Grenzwert monotoner Folgen wenn $\lim x_n = l$ and $\lim x_{n+1} = l$, löse ggf. $l = ? \cdot l$

Lemma 2.2.7, Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x, \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

Limes superior & Limes inferior

Definition Limes superior/inferior: $(a_n)_\mathbb{N}$ beschränkt. $b_n = \inf\{a_k | k \geq n\}$ and $c_n = \sup\{a_k | k \geq n\}$
$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$ (limes inferior)
$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$ (limes superior)
beide existieren & $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$
$b_{n+1} \geq b_n, c_{n+1} \leq c_n \Rightarrow$ steigend, fallend
algebraische Operationen halten nicht!

Cauchy Kriterium

Lemma 2.4.1: $(a_n)_\mathbb{N}$ konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)_\mathbb{N}$ beschränkt und $\liminf a_n = \limsup a_n$.
Theorem 2.4.2: $(a_n)_\mathbb{N}$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N \geq 1$ so that $|a_n - a_m| < \epsilon, \forall n, m \geq N$.
Shows: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ does not converge.
Corollary: $(a_n), (b_n)$ mit $|a_{n+1} - a_n| \leq b_n - b_{n+1}$. (b_n) konvergiert $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert

Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 2.5.1: abgeschlossenes Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$:
- $[a, b], a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$
- $[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}$
- $]-\infty, a], a \in \mathbb{R}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Corollary: $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \forall$ konvergente (a_n) in I, $\lim a_n \in I$
Monoton fallende Folge von Teilmengen: $(X_n)_\mathbb{N}, X_n \subset \mathbb{R}, X_n \supseteq X_{n+1}$
Theorem 2.5.5, Cauchy-Cantor: (I_i) monoton fallende Folge abgeschlossener Intervalle, $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann: $\cap_{n\geq1} I_n \neq \varnothing$. & wenn $\lim \mathcal{L}(I_n) = 0$: card $\cap ... = 1$
Theorem 2.5.6: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.
Definition 2.5.7: Teilfolge von (a_n) ist (b_n) mit $b_n = a_{l(n)}$ und $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $l(n) < l(n+1), \forall n \geq 1$

Theorem 2.5.9, Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.
Corollary: (a_n) beschränkt. $\forall$ konvergente Teilfolgend (b_n): $\liminf a_n \leq \lim b_n \leq \limsup a_n$.

Definition: (a_n), (b_n) konvergente Teilfolge mit $l = \lim b_n$: l ist Häufungspunkt von (a_n)

- (a_n) konvergiert mit $\lim a_n = l \Rightarrow$ alle Teilfolgen haben Grenzwert l (einziger Häufungspunkt)

Folgen in $\mathbb{R}^d$ & $\mathbb{C}$

Folgen in $\mathbb{R}^d$

Definition 2.6.1: Folge in $\mathbb{R}^d$ ist $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$.
Definition 2.6.2: (a_n) in $\mathbb{R}^d$ konvergent $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^d$ so dass $\forall\epsilon > 0, \exists N \geq 1$ mit $||a_n - a|| < \epsilon, \forall n \geq N$
Wenn konvergent: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Theorem 2.6.3: Mit $b = (b_1, ..., b_d)$, äquivalent:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = b$
2. $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j, \forall 1 \leq j \leq d$

Corollary 2.6.4: Sei $x = (x_1, ..., x_d)$: $\forall 1 \leq j \leq d$: $x^2 \leq \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leq d \cdot \max_{i\leq i\leq d} x_i^2 \Rightarrow |x_j| \leq ||x|| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1\leq i\leq d} |x_i|$
Corollary 2.6.5: $(a_n) \in \mathbb{R}^d$ konvergent $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt / $\exists R \geq 0$ mit $||a_n|| \leq R, \forall n \geq 1$
Theorem 2.6.6:

1. (a_n) konvergiert $\Leftrightarrow$ Cauchy Folge, i.e., $\forall\epsilon > 0, \exists N \geq 1$ mit $||a_n - a_m|| < \epsilon, \forall n, m \geq N$
2. jede beschränkte Folge hat konvergente Teilfolge

Folgen in $\mathbb{C}$

$(a_n)_\mathbb{N}$ komplexe Folge, $a_n = b_n + i \cdot c_n$ (a_n, c_n reel)
Theorem: $a_n = b_n + i \cdot c_n \in \mathbb{C}$ & $l = u + i \cdot v \in \mathbb{C}$

1. $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - l| < \epsilon$
2. $(|a_n - l|)_\mathbb{N} \to 0$
3. $b_n \to u$ ($Re(a_n) \to Re(l)$) und $c_n \to v$ ($Im(c_n) \to Im(l)$)

Fast alles reele (bis auf $\liminf, \limsup$) auch hier.
Theorem:

1. $a_n \to l \in \mathbb{C}, b_n \to l' \in \mathbb{C}$
   - $a_n + b_n \to l + l'$
   - $a_n b_n \to l \cdot l'$
   - $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{l'}$, falls $l' \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für große n
2. $a_n \to l \Leftrightarrow |a_n - l| \to 0$
3. $|a_n| \leq b_n$: $b_n \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$

Theorem: (a_n) komplexe Folge

1. (a_n) konvergiert $\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m : n \geq N, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$ (Cauchy)
2. (a_n) beschränkt: $\exists$ konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstrass)

Grenzwerte $\pm\infty$

Definition: (a_n) reel. $a_n \to +\infty \leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n > A$. Analog für $-\infty$.

Theorem: (a_n) fällt/steigt. Genau eins gilt:

1. (a_n) beschränkt & konvergent
2. (a_n) unbeschränkt & $a_n \to \pm\infty$

Theorem: (a_n) & $(b_n) \to \infty$

- (a_n) beschränkt $\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$
- $(a_n) \to l \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$
- $(a_n) \to 0, a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$

$a_n \to 0 \not\Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$ (may also be negative at times)

Reihen

Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ basiert auf Folge von Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Definition 2.7.1: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$ (S_n) konvergiert. Dann: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$.

$\forall$ Folgen: Folge der Partialsummen eindeutiger Folge.

Theorem 2.7.4: $\sum a_k, \sum b_j$ konvergent,$\alpha \in \mathbb{C}$

1. $\sum(a_k + b_k)$ konvergent & $\sum(a_k + b_k) = (\sum a_k) + (\sum b_k)$
2. $\sum(\alpha \cdot a_k)$ konvergent & $\sum(\alpha \cdot a_k) = \alpha \sum a_k$

Theorem 2.7.5, Cauchy Kriterium: $\sum a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 : |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon, \forall m \geq n \geq N$

Theorem 2.7.6: $\sum a_k, a_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. konvergiert $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt

Corollary 2.7.7: $\sum a_k, \sum b_k$: $0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \geq K, K \in \mathbb{N}$. Auch wenn: $|a_k| \leq b_k$.

- $\sum b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum a_k$ konvergent
- $\sum a_k$ divergent $\Rightarrow \sum b_k$ divergent

Definition 2.7.9: $\sum a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum |a_k|$ konvergiert

Theorem 2.7.10: $\sum a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum a_k$ konvergent & $|\sum a_k| \leq \sum |a_k|$

Theorem 2.7.12 - Leibniz: (a_n) monoton fallend & $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ & $\lim a_n = 0$: $S := \sum(-1)^{k+1} a_k$ konvergiert und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

Definition 2.7.14: $\sum a'_n$ ist Umordnung von $\sum a_n$ falls Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, a'_n = a_{\phi(n)}$. Umordnung konvergenter (nicht absolut) nicht möglich. Durch Umordnung beliebiger Grenzwert möglich.

Theorem 2.7.16, Dirichlet: $\sum a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow$ jede Umordnung konvergiert, gleicher Grenzwert

Theorem 2.7.17, Quotientenkrieterium, Cauchy: $(a_n), a_n \neq 0, \forall n \geq 1$

- $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergiert absolut
- $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert

Theorem 2.7.20, Wurzelkriterium:

- $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergiert absolut
- $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert (absolut)

Definition: (c_k). Wenn $\limsup \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert.

$$\rho = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \limsup \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}, & \text{falls } \limsup \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Corollary 2.7.21: $\sum c_k z^k$ konvergiert absolut $|z| < \rho$ / divergiert $|z| > \rho$

Doppelte Summation

$\sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}$ ist eine Doppelreihe. $\sum_i(\sum_j a_{ij}) \neq \sum_j(\sum_i a_{ij})$ möglich (wenn beide existieren).

Definition 2.7.22: $\sum_k b_k$ ist lineare Anordnung von $\sum_{i,j} a_{i,j}$ falls $\exists$ Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, b_k = a_{\sigma(k)}$

Theorem 2.7.23: $\exists B \geq 0$: $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B, \forall m \geq 0$. Dann: $(S_i := \sum_{j=0} a_{i,j}, \forall i \geq 0)$ und $(U_j := \sum_{i=0} a_{i,j}, \forall j \geq 0)$ und $(\sum_{i=0} S_i)$ und $(\sum_{j=0} U_j)$ konvergieren absolut. Und $\sum_{i=0} S_i = \sum_{j=0} U_j$. Und jede lineare Anordnung konvergiert mit gleichem Grenzwert.

Additional Stuff

Definition 2.7.24: Cauchy Produkt von $\sum_i a_i, \sum_j b_j$ ist Reihe $\sum_n(\sum_j a_{n-j} b_j)$.

Theorem 2.7.26: $\sum_i a_i, \sum_j b_j$ konvergieren absolut $\Rightarrow$ Cauchy Produkt konvergiert und $\sum_n(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j) = (\sum_{i=0} a_i)(\sum_{j=0} b_j)$

Theorem 2.7.28: $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Mit (1) $f(j) := \lim f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$, (2) $\exists g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$ (i) $|f_n(j)| \leq g(j), \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$ (ii) $\sum_{j=0} g(j)$ konvergiert. Dann: $\sum_{j=0} f(j) = \lim \sum_{j=0} f_n(j)$

Corollary 2.7.29: $\forall z \in \mathbb{C}$: $((1 + \frac{z}{n})^n)$ konvergiert mit $\lim(1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$

Stetige Funktionen

reellwertige Funktionen

$\mathbb{R}^D$ für alle $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$: Vektor-Raum:

- Addition: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- Skalare multiplikation: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
- Multiplikation: $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$
- Neutralelement $+: 0(x) = 0, \forall x \in D$
- Neutralelement $\cdot: 1(x) = 1, \forall x \in D$

$\mathbb{R}^D$ kommutativer Ring. Kein Körper da $\text{card} D \geq 2 \Rightarrow$ kein multiplikatives Inverse
$f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow \forall x \in D, f_1(x) \leq f_2(x)$.
Definition 3.1.1: $f \in \mathbb{R}^D$

1. f nach oben beschränkt $\Leftrightarrow f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt
2. f nach unten beschränkt $\Leftrightarrow f(D) \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt
3. f beschränkt $\Leftrightarrow f(D) \subset \mathbb{R}$ beschränkt

Definition 3.1.2: $f \in \mathbb{R}^D$

1. monoton wachsend $\Leftrightarrow \forall x, y \in D: x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
2. strengt monoton wachsend $\Leftrightarrow \forall x, y \in D: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
3. monoton fallend $\Leftrightarrow \forall x, y \in D: x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
4. strengt monoton fallend $\Leftrightarrow \forall x, y \in D: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
5. monoton $\Leftrightarrow$ monoton wachsend oder fallend
6. streng monoton $\Leftrightarrow$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend

Stetigkeit

Definition 3.2.1: $x_0 \in D$. $f \in \mathbb{R}^D$ stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Definition kann als formalisierung von beliebiger Approximation von $f(x_0)$ durch f verstanden werden.
Definition 3.2.2: $f \in \mathbb{R}^D$ stetig, wenn in jedem Punkt von D stetig.

Theorem 3.2.4: $x_0 \in D, f \in \mathbb{R}^D$. f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall (a_n) \in D, (\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0))$
Corollary 3.2.5: $x_0 \in D, \lambda \in \mathbb{R}, f, g \in \mathbb{R}^D$, beide stetig in x_0

1. $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in x_0
2. $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathbb{R}^{D \cap \{x \in D | g(x) \neq 0\}}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in x_0

Definition 3.2.6: Polynom $P \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist $P(x) = a_n x^n + ... + a_0, a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}$. Grad i: größtes i mit $a_i \neq 0$.
Corollary 3.2.7: Polygnome stetig auf $\mathbb{R}$.
Corollary 3.2.8: P, Q Polynome auf $\mathbb{R}$, $Q \neq 0$, $x_1, ..., x_m$ Nullstellen von Q: $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_m\}}, x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ stetig.

Zwischenwertsatz

c zwischen $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c \in [x_1, x_2], & x_1 \leq x_2 \\ c \in [x_2, x_1], & x_2 \leq x_1 \end{cases}$

Theorem 3.3.1, Bolzano: $I \subset \mathbb{R}$ (interval), $f \in \mathbb{R}^I$ stetig, $a, b \in I$. $\forall c$ zwischen $f(a), f(b), \exists z$ zwischen a, b mit $f(z) = c$.

Äquivalent: $f(I) \subset \mathbb{R}$ ist ein Interval in $\mathbb{R}$.
Corollary 3.3.2: Polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ mit $a_n \neq 0$, n ungerade. P hat mindestens eine Nullstelle.
Corollary 3.3.3: $c > 0$: $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$

Min-Max Satz

Definition 3.4.2: $I \subset \mathbb{R}$ (interval) kompakt $\Leftrightarrow$ Form $I = [a, b], a \leq b$
Lemma 3.4.3: $x_0 \in D$, $f, g \in \mathbb{R}^D$ stetig in x_0. $|f|, \max(f, g), \min(f, g)$ sind stetig in x_0.
Lemma 3.4.4: (x_n) konvergent in $\mathbb{R}$, $\lim x_n \in \mathbb{R}, a \leq b$: $\{x_n | n \geq 1\} \subset [a, b] \Rightarrow \lim x_n \in [a, b]$

Theorem 3.4.5: $I = [a, b], f \in \mathbb{R}^I$ stetig auf I. $\exists u, v \in I$: $f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in I$.

Min/Max finden ist deutlich schwerer als Existenz!

Umkehrabbildungen

Theorem 3.5.1: $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}, f \in D_2^{D_1}, g \in \mathbb{R}^{D_2}, x_0 \in D_1$. f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0) \Rightarrow g \circ f \in \mathbb{R}^{D_1}$ stetig in x_0.

Corollary 3.5.2: In 3.5.1, f stetig auf D_1, g stetig auf $D_2 \Rightarrow g \circ f$ stetig auf D_1
Theorem 3.5.3: $I \subset \mathbb{R}$ (interval), $f \in \mathbb{R}^I$ stetig und streng monoton. Dann $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ (interval) and $f^{-1} \in I^J$ stetig und streng monoton.

reelle Exponentialfunktion

Theorem 3.6.1: $\exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ streng monoton wachsend, stetig, surjektiv.
Corollary 3.6.2: $\exp(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\exp(x) > 1, \forall x > 0$
Corollary 3.6.3: $\exp(z) > \exp(y), \forall z > y$

Corollary 3.6.4: $\exp(x) \geq 1 + x$

Bijektion $\exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Umkehrabbildung: natürlicher Logarithmus
Corollary 3.6.5: $\ln:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig, bijektiv. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
Definieren: $x^a := \exp(a \ln x)$.
Corollary 3.6.6:

1. $a > 0$ $:]0, +\infty[\to]0, +\infty[, x \mapsto x^a$ stetig, streng monoton wachsend, Bijektion
2. $a < 0$ $:]0, +\infty[\to]0, +\infty[, x \mapsto x^a$ stetig, streng monoton fallend, Bijektion
3. $\ln(x^a) = a \ln x, \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
4. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
5. $(x^a)^b = x^{a \cdot b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
6. $(xy)^a = x^a y^a, \forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y > 0$

Konvergenz von Funktionenfolgen

Reellwertige Funktionenfolge: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D, n \mapsto f(n)$. Schreiben f_n statt $f(n)$. $x \in D: (f_n(x))_\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.
Definition 3.7.1: $(f_n)_\mathbb{N}$ konvergiert punktweise gegen $f: D \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Definition 3.7.2, Weierstrass: $f_n: D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig gegen $f \in \mathbb{R}^D \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1: \forall n \geq N, \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
Theorem 3.7.4: $f_n: D \to \mathbb{R}$ Funktionenfolge stetiger Funktionen. (f_n) konvergieren gleichmässig gegen $f \in \mathbb{R}^D \Rightarrow f$ stetig in D
Definition 3.7.5: $(f_n), f_n \in \mathbb{R}^D$ gleichmässig konvergent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) := \lim f_n(x)$ existiert und $(f_n)_\mathbb{N}$ gleichmässig gegen f konvergiert

Corollary 3.7.6: $(f_n), f_n \in \mathbb{R}^D$ konvergiert gleichmässig in $D \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1: \forall n, m \geq N, \forall x \in D: |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

Corollary 3.7.7: $f_n \in \mathbb{R}^D$ gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen $\Rightarrow f(x) := \lim f_n(x)$ stetig.

Definition 3.7.8: $\sum_k f_k(x)$ konvergiert gleichmässig $\Leftrightarrow S_n(x) := \sum_k f_k(x)$ konvergiert gleichmässig.
Theorem 3.7.9: $f_n \in \mathbb{R}^D$ Folge stetiger Funktionen. $|f_n(x)| \leq c_n (\forall x \in D), \sum_n c_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ konvergiert gleichmässig in D und Grenzwert $f(x) := \sum_n f_n(x)$ ist stetig in D.
Definition 3.7.10: $\sum_k c_k x^k$ hat positiven Konvergenzradius $\Leftrightarrow \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ exists. Dann: $\rho = \begin{cases} +\infty, & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}, & \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$

Theorem 3.7.11: $\sum_k c_k x^k, \rho > 0, f(x) := \sum_k c_k x^k, |x| < \rho. \Rightarrow \forall 0 \leq r < \rho, \sum_k c_k x^k$ konvergiert gleichmässig auf $[-r, r]$, $f:]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig

trigonometrische Funktionen

$\sin z := \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...$
$\cos z := \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$
konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$ (Quotientenkriterium), $\rho = \infty$
Theorem 3.8.1: $\sin, \cos \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ sind stetig
Theorem 3.8.2:

1. $\exp(iz) = \cos z + i \sin z, \forall z \in \mathbb{C}$
2. $\cos z = \cos(-z) \& \sin(-z) = -\sin z, \forall z \in \mathbb{C}$
3. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
4. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
   $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
5. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$

Corollary 3.8.3: $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$ & $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$
Corollary: $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x)$
$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$

Useful:
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

π

Theorem 3.9.1: sin: min. eine Nullstelle auf $]0,+\infty[$.
$\pi := \inf\{t > 0 | \sin t = 0\}$

1. $\sin\pi = 0, \pi \in]2,4[$
2. $\forall x \in]0,\pi[: \sin x > 0$
3. $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Corollary 3.9.2: $x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}, \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$
Corollary: $e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$
Corollary 3.9.3:

1. $e^{i\pi} = -1, e^{2i\pi} = 1$
2. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x, \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\sin(x+\pi) = -\sin x, \sin(x+2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\cos(x+\pi) = -\cos x, \cos(x+2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
5. Nullstellen von $\sin = \{k\cdot\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
   $\sin x > 0, \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
   $\sin x < 0, \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
6. Nullstellen von $\cos = \{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
   $\cos x > 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
   $\cos x < 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2}+(2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$

Corollary: Bild von cos auf $[0,\pi]$ / sin auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ist $[-1,1]$.
$z \notin \frac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z} : \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$
$z \notin \pi\cdot\mathbb{Z} : \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$

Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.10.1: $x_0 \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $D \Leftrightarrow \forall\delta > 0 : (]x_0-\delta, x_0+\delta[\backslash\{x_0\}) \cap D \neq \varnothing$
Definition 3.10.3: $f \in \mathbb{R}^D, x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt D. $A \in \mathbb{R}$ Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon, \exists\delta > 0, \forall x \in D \cap (]x_0-\delta, x_0+\delta[\backslash\{x_0\}), |f(x)-A| < \epsilon$.
Corollary 3.10.4:

1. $f \in \mathbb{R}^D, x_0$ Häufungspunkt.
   $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall(a_n)_\mathbb{N}$ in $D\backslash\{x_0\}$ mit $\lim a_n = x_0$: $\lim f(a_n) = A$.
2. $x_0 \in D : f$ stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. $f, g \in \mathbb{R}^D, \lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x)$ exist:
   $\lim(f+g)(x) = \lim f(x) + \lim g(x)$
   $\lim(f\cdot g)(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
4. $f, g \in \mathbb{R}^D, f \leq g : \lim f(x) \leq \lim g(x)$ (falls existent)
5. $g_1 \leq f \leq g_2, \lim g_1(x) = \lim g_2(x)$: $\lim f(x)$ existiert und $\lim f(x) = \lim g_1(x)$

Definition der Vorlesung:

1. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. $\lim_{x\to b} f(x) = y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in [a,b[, |x-b| < \delta \Rightarrow |f(x)-y| < \epsilon)$
2. $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall T > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in [a,b[, |x-b| < \delta \Rightarrow f(x) > T)$
3. $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall T < 0, \exists\delta > 0, \forall x \in [a,b[, |x-b| < \delta \Rightarrow f(x) < T)$
4. $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0, \exists T \geq a, \forall x \geq T, |f(x)-y| < \epsilon)$
5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall T > 0, \exists S \geq a, \forall x \geq S, f(x) > t)$
6. ...

Theorem: $x_0, y \in \mathbb{R}\cup\{\infty\} : \lim_{x\to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \forall(a_n), a_n \in D_f, a_n \to x_0, f(a_n) = y$
Theorem:

1. f stetig in $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. arithmetische Grenzwertoperationen gelten

Theorem 3.10.6: $D, E \subset \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von $D, f \in E^D, y_0 := \lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, $y_0 \in E$. Wenn $g \in \mathbb{R}^E$ stetig in y_0 : $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$
Links-/Rechtsseitige Konvergenz: $f \in \mathbb{R}^D, x_0 \in \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von $D\cap]x_0,+\infty[$ (rechtsseitiger Häufungspunkt). $\lim_{x\to x_0} f|_{D\cap[x_0,\infty[}(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (auch mit $\lim = \infty$ definiert)
Corollary: - $\lim \frac{e^x}{x^a} = \infty$, - $\lim x^a e^{-x} = 0$

Differenzierbare Funktionen

Ableitung: Definition +

$D \subset \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}^D, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D.

Definition 4.1.1: f differenzierbar in x_0 falls $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Grenzwert: $f'(x_0)$.
Äquivalent/Alt.: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Tangente in x_0 : $f(x) = f'(x)(x-x_0) + f(x_0)$.

Theorem 4.1.3, Weierstrass: $f \in \mathbb{R}^D, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Äquivalent:

1. f differenzierbar in x_0
2. $\exists c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^D$
   - $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$
   - $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0

   Dann $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$: Tangentengleichung x_0

Theorem 4.1.4: $f \in \mathbb{R}^D$ differenzierbar in $x_0 \Leftrightarrow \exists \phi \in \mathbb{R}^D$ stetig in x_0, $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0) (\forall x \in D)$. Dann $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Corollary 4.1.5: $f \in \mathbb{R}^D, x_0$ Häufungspunkt. f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

Definition 4.1.7: $f \in \mathbb{R}^D$ differenzierbar in $D \Leftrightarrow f$ differenzierbar $\forall x_0 \in D$ Häufungspunkt

Theorem 4.1.9: $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt, $f, g \in \mathbb{R}^D$ differenzierbar in x_0:

- $f+g$ differenzierbar in x_0: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $f \cdot g$ differenzierbar in x_0: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $f(x_0) \neq 0$: $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0: $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Theorem 4.1.11: $D, E \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. $f \in E^D$ differenzierbar in x_0, $y_0 := f(x_0)$ Häufungspunkt von E, $g \in \mathbb{R}^E$ differenzierbar in y_0. Dann: $g \circ f \in \mathbb{R}^D$ differenzierbar in x_0 mit $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Corollary 4.1.12: $f \in E^D$ Bijektion differenzierbar in x_0, $x_0 \in D$ Häufungspunkt, $f'(x_0) \neq 0$, f^{-1} stetig in $y_0 = f(x_0)$. Dann: y_0 Häufungspunkt von E, f^{-1} differenzierbar in y_0 : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

erste Ableitung

Definition 4.2.1: $f \in \mathbb{R}^D, x_0 \in D, D \subset \mathbb{R}$

1. f lokales Maximum in $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0) (\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D)$
2. f lokales Minimum in $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : f(x) \geq f(x_0) (\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D)$
3. f lokales Extremum in $x_0 \Leftrightarrow$ lokales Minimum oder Maximum in x_0

Theorem 4.2.2: $f :]a, b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[$, f differenzierbar in x_0.

1. $f'(x_0) > 0$: $\exists \delta > 0$
   - $f(x) > f(x_0), \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
   - $f(x) < f(x_0), \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
2. $f'(x_0) < 0$: $\exists \delta > 0$
   - $f(x) < f(x_0), \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
   - $f(x) > f(x_0), \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
3. f lokales Extremum in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Theorem 4.2.3, Rolle 1690: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a, b[$. $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \zeta \in]a, b[, f'(\zeta) = 0$
Theorem 4.2.4, Lagrange 1797: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a, b[$. $\Rightarrow \exists \zeta \in]a, b[: f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b-a)$
Corollary 4.2.5: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$

1. $f'(\zeta) = 0, \forall \zeta \in]a, b[\Rightarrow f$ konstant
2. $f'(\zeta) = g'(\zeta), \forall \zeta \in]a, b[\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + c, \forall x \in [a, b]$
3. $f'(\zeta) \geq 0, \forall \zeta \in]a, b[\Rightarrow f$ monoton wachsend auf $[a, b]$
4. $f'(\zeta) > 0, \forall \zeta \in]a, b[\Rightarrow f$ strikt monoton wachsend auf $[a, b]$
5. $f'(\zeta) \leq 0, \forall \zeta \in]a, b[\Rightarrow f$ monoton fallend auf $[a, b]$
6. $f'(\zeta) < 0, \forall \zeta \in]a, b[\Rightarrow f$ strikt monoton fallend auf $[a, b]$
7. $\exists M \geq 0, |f'(\zeta)| \leq M, \forall \zeta \in]a, b[\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b], |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$.

Theorem 4.2.9, Cauchy: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a, b[\Rightarrow \exists \zeta \in]a, b[, g'(\zeta)(f(b) - f(a)) = f'(\zeta)(g(b) - g(a))$.
Falls $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$

Theorem 4.2.10, l'Hospital: $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$. Wenn $\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$ und $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert $\Rightarrow \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Also with $b = +\infty, \lambda = +\infty, x \to a^+$.

Definition 4.2.13:

1. $f \in \mathbb{R}^I$ konvex auf $I \Leftrightarrow \forall x \leq y \in I, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
2. f streng konvex $\Leftrightarrow \forall x < y \in I, \lambda \in [0, 1]$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Corollary 4.2.14: $f \in \mathbb{R}^I$ konvex. $\forall n \geq 1, \{x_1, ..., x_n\} \subset I, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in [0, 1]^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 : f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$
Lemma 4.2.15: $f \in \mathbb{R}^I$ konvex $\Leftrightarrow \forall x_0 < x < x_1 \in I : \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$. streng kovex mit $<$.

Theorem 4.2.16: $f \in \mathbb{R}^{]a,b[}$ differenzierbar in $]a, b[$. (streng) konvex $\Leftrightarrow f'$ (streng) monoton wachsend
Corollary 4.2.17: $f \in \mathbb{R}^{]a,b[}$ zweimal differenzierbar in $]a, b[$. f (streng) konvex $\Leftarrow f'' \geq 0 (f'' > 0)$ auf $]a, [$.

höhere Ableitungen

$D \subset \mathbb{R}, \forall x_0 \in D$ sind Häufungspunkt, $f \in \mathbb{R}^D$ differenzierbar. Schreiben: $f' = f^{(1)}$.
Definition 4.3.1:

1. $n \geq 2$, f n-mal differenzierbar in $D \Leftrightarrow f^{(n-1)}$ differenzierbar in D. Dann $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ n-te Ableitung von f.
2. f n-mal stetig differenzierbar in $D \Leftrightarrow$ n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig in D
3. f ist glatt in $D \Leftrightarrow \forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar

Corollary 4.3.2: $n \geq 1$: n-mal differenzierbar $\Rightarrow (n-1)$-mal stetig differenzierbar

Theorem 4.3.3: $n \geq 1, f, g \in \mathbb{R}^D$ n-mal differenzierbar in D

1. $f+g$ n-mal differenzierbar: $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. $f \cdot g$ n-mal differenzierbar: $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Theorem 4.3.5: $n \geq 1, f, g \in \mathbb{R}^D$ n-mal differenzierbar. $g(x) \neq 0, \forall x \in D \Rightarrow \frac{f}{g}$ n-mal differenzierbar.
Theorem 4.3.6: $E, D \subset \mathbb{R}$, alles Häufungspunkte, $f \in E^D, g \in \mathbb{R}^E$ je n-mal differenzierbar $\Rightarrow g \circ f$ n-mal differenzierbar $(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$. $A_{n,k}$ polynom in $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n+1-k)}$.

Potenzreihen & Tayler Approximation

Theorem 4.4.1: $f_n :]a, b[\to \mathbb{R}$ Funktionenfolge, f_n einmal stetig differenzierbar in $]a, b[\forall n \geq 1$, $(f_n)_{\mathbb{N}}$ und $(f'_n)_{\mathbb{N}}$ konvergieren gleichmässig in $]a, b[$, $\lim f_n =: f$, $\lim f'_n =: p$. $\Rightarrow f$ stetig differenzierbar, $f' = p$
If $f'_n \to p$ important. Bernstein Polynome $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$. Können $f_n \to f$ für beliebiges stetige f.
Theorem 4.4.2: $\sum_k c_k x^k$ Potenzreihe, Konvergenzradius $\rho > 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k (x-x_0)^k$ auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k (x-x_0)^{k-1}, \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$
Corollary 4.4.3: f glatt auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$: $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^\infty c_k \frac{k!}{(k-j)!}(x-x_0)^{(k-j)}$ mit $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$
Glatte Funktionen lassen sich durch Polynome approx.
Definition Vorlesung: $f :]a, b[\to \mathbb{R}, x_0 \in]a, b[, \exists n \geq 0, \exists (f, ..., f^{(n)})$ on $]a, b[$. Taylor polynomial of order n: $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
Theorem 4.4.5: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $(n+1)$-mal differenzierbar in $]a, b[\Rightarrow \forall a < x \leq b \exists \zeta \in]a, x[$: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Corollary 4.4.6, Taylor Approximation: $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig, $(n+1)$-mal differenzierbar in $]c,d[$. $\forall a\in]c,d[, \forall x\in[c,d], \exists\zeta$ zwischen x,a :
$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Means: Taylor polynomial good approximation for f near x_0

Corollary 4.4.7: $n\geq 0, a<x_0<b, f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ $(n+1)$-mal differenzierbar in $]a,b[$. Wenn $f^{(1)}=f^{(2)}=...=f^{(n)}=0$

1. n gerade, x_0 lokale Extremstelle $\Rightarrow$ $f^{(n+1)}(x_0)=0$
2. n ungerade, $f^{(n+1)}(x_0)>0\Rightarrow x_0$ strikte lokale Minimalstelle
3. n ungerade, $f^{(n+1)}(x_0)<0\Rightarrow x_0$ strikte lokale Maximalstelle

Corollary 4.4.8: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, zweimal differenzierbar in $]a,b[$. $a<x_0<b$. Falls $f'(x_0)=0$

1. $f^{(2)}(x_0)>0\Rightarrow x_0$ strikte lokale Minimalstelle
2. $f^{(2)}(x_0)<0\Rightarrow x_0$ strikte lokale Maximalstelle

Riemann Integral

$a < b, I = [a,b]$

Motivation: Flächeninhalt

Flächeninhalt $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ von $f : [a,b] \to [0,\infty[$ definiert als $\int_a^b f(t)dt$.
Flächeninhalt als Definitionsgrundlage fürs Integral (Intuition für Definition). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ziel: Orientierter Flächeninhalt zwischen f und x-Achse in $\mathbb{R}^2$. Fläche wie oben definiert. Drei Eigenschaften:

- $f_1 \ge f_2 \Rightarrow FI(X_{f_1}) \ge FI(X_{f_2})$
- $a < c < b$. $f_1 = f$ auf $[a,c]$, $f_2 = f$ auf $[c,b] \Rightarrow FI(X_{f_1}) + FI(X_{f_2}) = FI(X_f)$
- Nach Rechtecken: $f(x) = t \Rightarrow FI(X_f) = t(b-a)$.

Integral (Flächeninhalt) folgt dann durch unendlich vielen undendlich keinen Rechtecken zur Approximation von Kurven/f.

$\Rightarrow$ **Motivation für die Definition**

Definition & Integrabilitätskriterien

Definition 5.1.1: Partition von $I \Leftrightarrow$ endliches $P \subsetneq [a,b], \{a,b\} \subset P$ (eindeutig wenn x-geordnet)
P' Verfeinerung von $P \Leftrightarrow P \subset P'$ & $n := \text{card}P - 1$
$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}, x_0 = a, x_n = b$
Definieren: $\delta_i := x_i - x_{i-1}$ (Länge von $[x_{i-1}, x_i]$)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit M.
Definition Untersumme f: $s(f,P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, f_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$
Definition Obersumme f: $S(f,P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, F_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$
Lemma 5.1.2:

1. P' Verfeinerung von P $\Rightarrow s(f,P) \le s(f,P') \le S(f,P') \le S(f,P)$
2. Beliebige $P_1, P_2 : s(f,P_1) \le S(f,P_2)$

Definition: $\mathcal{P}(I)$ Menge aller Parititonen von I
- $s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P)$
- $S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$
$s(f) \le S(f)$
Definition 5.1.3: beschränktes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar/integrierbar $\Leftrightarrow$ $s(f) = S(f)$.
Dann: $s(f) = S(f) =: \int_a^b f(x)dx$
Auch andere Integral-Definitionen: Lebesgue's definition. Dann $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rational} \\ 0, & x \text{ irrational} \end{cases}$ integrierbar mit 1. Nach Riemann nicht integrierbar!
Theorem 5.1.4: beschränktes f integrierbar $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathbb{P}(I) : S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
$\mathcal{P}_\delta(I) := \{P | \max_{1 \le i \le n} \delta_i \le \delta\}$.
Theorem 5.1.8, Du Bois-Reymond/Darboux: beschränktes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall P \in \mathcal{P}_\delta(I) : S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
Definition: $\delta(P) := \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$
Definition Riemannsche Summe: $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebiger Partition P, $1 \le i \le n$: $\sigma := \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\delta_i$
Corollary 5.1.9: beschränktes $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ integrierbar mit $A := \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i], P = \{x_1, ..., x_n\}$: $|A - \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon$

Integrierbare Funktionen

Theorem 5.2.1: $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ beschränkt, integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g), \frac{f}{g}(g(x) \neq 0, \forall x \in [a,b])$.
Corollary 5.2.2: $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\Rightarrow \sup_{x,y \in [a,b]} |\psi(x) - \psi(y)| = \sup_{x \in [c,d]} \psi(x) - \inf_{x \in [c,d]} \psi(x)$

Corollary 5.2.3: P, Q Polynome, $[a,b]$ ohne Q Nullstelle. Dann $[a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ integrierbar.

Definition 5.2.4: $f \in \mathbb{R}^D$ gleichmässig stetig in $D \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in D : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$
Theorem 5.2.6, Heine: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$. f gleichmässig stetig in $[a,b]$.

Theorem 5.2.7: $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stetig $\Rightarrow f$ integrierbar
Theorem 5.2.8: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f$ ist integrierbar

Corollary 5.2.9: $a < b < c, f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ beschränkt, $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar $\Rightarrow f$ integrierbar mit $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(dx)dx + \int_b^c f(x)dx$.
Definition: $\int_a^a f(x)dx = 0$ und wenn $a < b$: $\int_b^a (fx)dx := -\int_a^b f(x)dx$.

Theorem 5.2.10: $I \subsetneq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall $[a,b]$, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^I$ beschränkt integrierbar, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$

Ungleichungen und der Mittelwertsatz

Theorem 5.3.1: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
Corollary 5.3.2: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar $\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)dx|dx$
Theorem 5.3.3, Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar $\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$
Theorem 5.3.4, Mittelwertsatz: $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stetig $\Rightarrow \exists \zeta \in [a,b], \int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b-a)$
Theorem 5.3.6: $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}, f$ stetig, g beschränkt integrierbar, $g(x) \ge 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \zeta \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$

Fundamentalsatz der Differentialrechnung

Theorem 5.4.1: $a < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. $F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \le x \le b$, stetig differenzierbar in $[a,b]$ und $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$
Definition 5.4.2: $a < b, f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stetig. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von $f \Leftrightarrow F$ (stetig) differenzierbar in $[a,b], F' = f$ in $[a,b]$.

Theorem 5.4.3, Fundamentalsatz der Differenzialrechnung: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \exists F$ von f (eindeutig bis auf additive Konstante): $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Notation: $[f(x)]_a^b := f(b) - f(a)$

Theorem 5.4.5, Partielle Integration: $a < b \in \mathbb{R}, f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stetig differenzierbar $\Rightarrow \int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.
Theorem 5.4.6, Substitution: $a < b$, $\phi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ stetig differenzierbar, $\phi([a,b]) \subset I \subset \mathbb{R}, I$ interval, $f : \mathbb{R}^I$ stetig $\Rightarrow \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$

Corollary 5.4.8: $I \subset \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}^I, a, b, c \in \mathbb{R}$
- $[a+c, b+c] \subset I, \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(t+c)dt$
- $c \neq 0, [ac, bc] \subset I, \int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx$

Integration konvergenter Reihen

Theorem 5.5.1: $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Folge beschränkter, integrierbarer Funktionen, gleichmässig konvergent zu $f : [a,b] \to \mathbb{R} \Rightarrow f$ beschränkt integrierbar $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
Corollary 5.5.2: $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Folge beschränkter integrierbarer Funktionen so dass $\sum_{n=0}^\infty f_n$ gleichmässig konvergiert auf $[a,b] \Rightarrow \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^\infty f_n(x))dx$
Corollary 5.5.3: $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_k x^k$ Potenzreihe mit $\rho > 0 \Rightarrow \forall 0 \le r < \rho, f$ integrierbar auf $[-r, r], \forall x \in]-\rho, \rho[: \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$

Skript

- Eeuler-McLaurin Summationsformel
- Stirling'sche Formel

In der Vorlesung anders thematisiert.

Stirling'sche Formel

$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n}$

Vorlesung 'exklusiv': Summen Approximieren

$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, f \ge 0$. Want to know $S_n = f(1) + ... + f(n)$ or get approximation.
Theorem: $f \in \mathbb{R}^{[1,\infty[}, f \ge 0, f$ increasing, $S_n = f(1) + ... + f(n) \to \infty$.

1. $S_n \le \int_1^{n+1} f(t)dt$
2. $S_n - f(1) \ge \int_1^n f(t)dt$

To approximate the sum, we then get $\int_1^n f(t)dt + f(1) \le S_n \le \int_1^{n+1} f(t)dt$

uneigentliche Integrale

Definition 5.8.1: $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b], \forall b > a$. Wenn $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ existiert, bezeichnen $\int_a^\infty f(x)dx$. "f integrierbar auf $[0, \infty[$".

Lemma 5.8.3: $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar $[a, b], \forall b > a$

1. $|f(x)| \leq g(x) (\forall x \geq a), g(x)$ integrierbar auf $[a, \infty[\Rightarrow f$ integrierbar auf $[a, \infty[$
2. $0 \leq g(x) \leq f(x), \int_a^\infty g(x)dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ divergent

Theorem 5.8.5, McLaurin: $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert

Definition 5.8.8: $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ (auf $[a + \epsilon, b], \epsilon > 0$, beschränkt und integrierbar) integrierbar $\Leftrightarrow \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ existiert. Grenzwert: $\int_a^b f(x)dx$

Gamma Funktion in der Vorlesung nicht betrachtet.

unbestimmte Integrale

$f \in \mathbb{R}^I, I \subset \mathbb{R}$. f stetig $\Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$ für Stammunktion F.

Theorem Partielle Integration: $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$
Theorem Substitution: $\int f(\phi(u))\phi'(u)du = F \circ \phi(u)$

Stammfunktionen rationaler Funktionen
$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$: $\int R(x)dx$ lässt sich als elementare Funktion darstellen.

1. Reduktion auf $\deg(P) < \deg(Q)$. Verwende: Euklidischer Algorithmus.
2. Zerlegung in Summe von Brüchen bestimmter Formen
   (a) Einfache Polynome sind bereits bekannt.
   (b) $\int \frac{a}{bx+c}dx = \frac{a}{b}\int \frac{dy}{y}$ (with $y = bx + c, dy = bdx) = \frac{a}{b}(\log(y) + C) = \frac{a}{b}(\log(bx + c) + C)$
   (c) must have $d^2 - 4ec < 0, c \neq 0$
   $\boxed{\int \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e}dx}$ (with $y = x + \frac{d}{2c}$ / $x = y - \frac{d}{2c}$, $dx = dy$, $\alpha = \frac{e}{c} - \frac{d^2}{4c^2}$)
   $\boxed{= \int \frac{a(y - \frac{d}{2c}) + b}{c(y^2) + \alpha}dy}$ (with $w = \frac{y}{\sqrt{\alpha}}, dw = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}dy, y = w\sqrt{\alpha})$
   $\boxed{= \sqrt{\alpha}\int \frac{a(w\sqrt{\alpha} - \frac{d}{2c}) + b}{c\alpha(w^2 + 1)}dw}$
   Mit $\int \frac{w}{w^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2w}{w^2+1}dw = \frac{1}{2}\log(w^2 + 1)$ & $\int \frac{1}{w^2+1}dw = \arctan(w)$ gelöst werden.
3. Integration der Partialbrüche

Example for (b)
$\int \frac{x^3}{x^2-1}$. First, $\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x\cdot(x^2-1)+x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$. Then, $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}) \Rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$. Now, we can aply 2 and get: $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x - 1) + \frac{1}{2}\log(x + 1) + C$

Example for (c)
We have $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ This satisfies all requirements regarding the polynomial coefficients. Notice that $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4} = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ We substitute $y = x+\frac{1}{2}$ and get $\int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}}$ Then, we substitute $y = \frac{\sqrt{3}}{2}w, dy = \frac{\sqrt{3}}{2}dw$ and get $\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}(w^2+1)}dw$ So we get this and resubstitute: $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\arctan(w) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2y}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2}))$

(c) w/o condition example Concept, not entirely correct.

$$\int \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e}dx$$
$$= \int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 2}dx$$
with $y = x + 2, dy = dx$
$$= \int \frac{y - 1}{y^2 - 2}dy$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{y - 1}{1 - \frac{y^2}{2}}dy$$
with $\omega = \frac{y}{\sqrt{2}}$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\omega\sqrt{2} - 1}{1 - \omega^2}d\omega$$
$$= -\int \frac{\omega}{1 - \omega^2}d\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1 - \omega^2}d\omega$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{-2\omega}{1 - \omega^2}d\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\omega)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1 - \omega^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\omega)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(1 - \frac{y^2}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\frac{y}{\sqrt{2}})$$
$$= \frac{\ln(1 - \frac{(x+2)^2}{2})}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\frac{x + 2}{\sqrt{2}})$$

(Hopefully) Helpful stuff

wichtige Konvergenzen

Grenzwerte

- $\frac{1}{n} \to 0$ (direkt von Definition)
- $\frac{1}{n^2} \to 0$ (Vergleichsprinzip)
- $\frac{1}{2^n} \to 0$ (Vergleichsprinzip)
- $\frac{1}{n!} \to 0$ (Vergleichsprinzip)
- $\frac{\cos(...)}{n} \to 0$ ($|\cos(...)| \leq 1$)
- $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$
- $\lim n^a q^n = 0, 0 \leq q < 1, a \in \mathbb{Z}$ (fallend + Methode "Grenzwert monotoner Folgen")
- $a_1 = c, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$ konvergiert $\sqrt{c}$ (fallend + Methode "Grenzwert monotoner Folgen")
- $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0$ ($a \in \mathbb{Z}, 0 \leq q < 1$) monoton fallend für groß genug n, nach unten beschränkt, Weierstrass
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $n \geq 1$ von $(b^n - a^n) = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + ...)$ & $\lim \frac{n}{(1+\epsilon)^n} = 0$
- $a_1 = c > 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$: $\lim a_n = \sqrt{c}$ Da monoton fallend, >0 & Weierstrass
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+5} - x = \lim \frac{(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}{\sqrt{x^2+5}+x} = \lim \frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x} = \lim \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} = 0$

Reihen

- $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2}$ (konvergiert nach Cauchy Corollary), $= \frac{\pi^2}{6}$ alternativ Vergleich zu $\sum \frac{1}{(k-1)k}$
- $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^3}$ konvergiert, Grenzwert ?
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \to \infty$
- $\sum \frac{1}{n} = \infty$ (increasing + Cauchy (not bound))
- $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1, q \in \mathbb{C}$ ($a_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Induktion, $|a_n - \frac{1}{1-q}| \to 0$)
- $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ konvergiert absolut
- $\sum (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konvergiert, aber nicht absolut
- $\sum \frac{n!}{2^n}$ divergiert (Quotientenkriterium)
- $\sum q^n$ konvergiert $|q| < 1$, divergiert ≥ 1 (Quotientenkriterium, besonders für $= 1$)
- $\sum \frac{z^k}{k!}$ konvergiert

- $\sum a_n$ konvergiert, $a_n = x_0 + ... + x_n$, $x_n = a_n - a_{n-1} \to 0$
- $\sum x_n = \sum(x_{2n+1} + x_{4n+2} + x_{4n+4})$ falls $\sum x_n$ absolut konvergiert
- $\sum x_n$ konvergiert (nicht absolut). $\forall m \in \mathbb{R}$, Bijektion $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert $\sum \frac{(-1)^{j(k)-1}}{j(k)} = m$

Doppelte Summation Vertauschung von Index
- funktioniert bei $a_{m,n} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{m})^k$
- funktioniert nicht bei $a_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ -1, & m+1 = n \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

Cauchy Produkt

$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. $|\sum_{j=0}^n a_{n-j}a_j| = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(j+1)}} \geq \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$

Polynome

$p(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0, a_d \neq 0$
$q(x) = b_c x^c + ... + b_0, b_c \neq 0$
Betrachtung von $\lim \frac{p(n)}{q(n)}$.

- $d > c$:
  $\frac{a_d}{b_c} > 0 \Rightarrow \lim \frac{p(n)}{q(n)} = +\infty$
  $\frac{a_d}{b_c} < 0 \Rightarrow \lim \frac{p(n)}{q(n)} = -\infty$
- $d = c$
  $\lim \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_d}{b_c}$
- $d < c$
  $\lim \frac{p(n)}{q(n)} = 0$

Euler

$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ (konvergiert da fallend mit 2.2.7)

Exponentialfunktion

Betrachte $\sum \frac{z^n}{n!}$. Konvergiert $\forall z$ (Quotoentenkriterium). $\exp(z) := \sum \frac{z^n}{n!}$
Mit 2.7.26: $\exp(z + w) = \exp(w)\exp(z)$
$\exp(z) \neq 0$ as inverse $\neq 0$ with $\exp(z - z) = 1$.
$\exp(1) := e \approx 2.718281828... \Rightarrow \exp(z) = \exp(1 + ... + 1) = \exp(1)^z = e^z$
Stetigkeit Let $x_0 \in \mathbb{R}$. $\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(x - x_0) - 1)$ and $exp(x - x_0) - 1 = \sum_{n=1}^\infty \frac{(x-x_0)^n}{n!}$. With the triangle inequality and $\frac{1}{n!} \leq 1$, we get $|\exp(x - x_0) - 1| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{|x-x_0|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^\infty |x - x_0|^n = \frac{1}{1-|x-x_0|} - 1 = \frac{|x-x_0|}{1-|x-x_0|}$. Then, for $\epsilon > 0$, let $\delta = \min(\frac{1}{4}, \frac{\epsilon}{4\exp(x_0)})$. With $|x - x_0| < \delta$, we get $|\exp(x) - \exp(x_0)| < 2\exp(x_0)\frac{\epsilon}{4\exp(x_0)} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

Grenzwerte von Funktionen

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim(\frac{1}{x}(x - \frac{x^3}{6} + ...)) = \lim(1 - \frac{x^2}{6} + ...) = 1$

- $\lim \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$
- $\lim e^x = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim \frac{e^x}{x^a} = \infty$
- $\lim x^a e^{-x} = 0$

Trigonometry

Corollary 4.2.8: $[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ is Bijektion von $[0, 2\pi[$ nach $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.
Proof of existence: Since $x^2 + y^2 = 1$ we get $0 \leq x^2 \leq 1$ and $-1 \leq x \leq 1$. This means that there is a unique $u \in [0, \pi]$ such that $\cos(u) = x$. Then, from $1 = x^2 + y^2 = \cos^2(u) + \sin^2(u) = x^2 + \sin^2(u)$ we get $y^2 = \sin^2(u)$ wo $y = \pm\sin(u)$. Case 1: If $y \geq 0$, then $y = \sin(u)$ since $0 \leq u \leq \pi$. We take $t = u$. Case 2: If $y < 0$, then $y = -\sin(u) = \sin(2\pi - u)$. But then also $x = \cos(u) = \cos(2\pi - u)$ So we can take $t = 2\pi - u \in [\pi, 2\pi]$.

- $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{0}{1} = 0$

Corollary 4.2.18, Example!: $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1+...+x_n}{n}$
We consider $f(x) = -\ln x$ with $f'(x) = -\frac{1}{x}$ and $f''(x) = \frac{1}{x^2}, x \in]0, \infty[$. Hence, f is convex. From 4.2.14 with $I =]0, \infty[$ and $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ we get $-\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i) \leq \sum_{i=1}^n -\frac{1}{n}\ln x_i = -\frac{1}{n}\ln(x_1 \cdots x_n)$ Now we use that exp is increasing:

$$\exp(\frac{\log x_1}{n} + ... + \frac{\log x_n}{n}) \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$
$$\Leftrightarrow \exp(\frac{\log x_1}{n}) \cdots \exp(\frac{\log x_n}{n}) \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

Zeta-Funktion

Für $s > 1$ konvergiert $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$.
$S_N = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{N^s}$. Mit $k \geq 1, N \leq 2^k$, dann $S_N \leq S_{2^k}$.

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$
$$\leq 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + ...$$
$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^4} + ...$$

Folgt mit Vergleichssatz und geometrischer Reihe.

Gamma Funktion

$\int_0^b x^n e^{-x}dx = -b^n e^{-b} + n\int_0^b x^{n-1}e^{-x}dx$. Mit $\lim_{b\to+\infty} b^n e^{-b} = 0$: $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$. Es folgt: $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n(n-1)...1\int_0^\infty e^{-x}dx = n!$.

Konvergenzen

Example

$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konvergiert gdw. $\int_2^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\beta}dx$ konvergiert. $b > 2, x = e^u, u \in [\ln 2, \ln b]$.
$\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{e^u u^\beta}e^u du = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{u^\beta}du$.

Ableitungen

- $\exp' = \exp$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ (4.1.12)
- $(\log)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
- $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ (4.1.9(3))
- $\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Notice: f even ($f(-x) = f(x)$) $\Rightarrow f'$ uneven ($f(-x) = -f(x)$) & f uneven $\Rightarrow f'$ even

x^2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ Then $f'(x_0) = 2x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ Follows from $f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$ For $x \neq x_0$ then $\lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim x + x_0 = 2x_0$

$ax + b$

$f(x) = ax+b$ f is differentiable with $f'(x) = a$ as $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{a(y-x)}{y-x} = a$.

arcsin

$\sin' = \cos, \cos x > 0 (\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) \overset{5.2.5(4)}{\Longrightarrow}$ sin strikt monoton wachsend auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ / $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ Bijektion. $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Umkehrfunktion. Differenzierbar $]-1,1[$. $\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

With 4.1.12 we know that $\arcsin$ is differentiable on $]-1,1[$ and with $y = \sin x$ get $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ We can use $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow y^2 = \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. With $\cos(x) > 0$ (which holds for $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) we get: $\cos(x) = \sqrt{1-y^2}$. So, $\forall y \in]-1,1[$ we get $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

arccos

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$. $\arccos' y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.

tan

$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$

arctan

$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \arctan :]-\infty, \infty[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. $\arctan' y = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$.

arccot

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\text{arccot} :]-\infty, \infty[\to]0, \pi[, \text{arccot}' y = -\frac{1}{1+y^2}$

Hyperbel & Areafunktionen

$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \cosh' x = \sinh x, \sinh' x = \cosh x, \text{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \text{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0, \text{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2}$

Stuff

4.3.4: $\exp, \sin, \cos \sinh, \cosh, \tanh, \ldots$ sind glatt auf ganz $\mathbb{R}$
Polynome sind glatt auf ganz $\mathbb{R}$
ln ist glatt

Integrals

- $\int e^x dx = e^x$
- $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2}\sin(2x)$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log x + C, x > 0$
- $\int x^s dx = \begin{cases} \frac{x^{s+1}}{s+1} + C, & s \neq -1 \\ \ln x + C, & x > 0 \end{cases}$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{arsinh} x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \text{arcosh} x + C$
- $\int \cos(ax) = \frac{1}{a}\sin(ax)$

$f(x) = x$

Let $f(x) = x$ on $[a,b]$. Let $P_n = \{a + i \cdot h | 0 \leq i \leq n\}$ with $h = \frac{b-a}{n}$. Then

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)h) \\ &= \frac{b-a}{n}\Big(na + h\frac{n(n-1)}{2}\Big) \\ &= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}\Big(\frac{n-1}{n}\Big) \end{aligned}$$

And $S(f, P_n) = \ldots = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2}(\frac{n-1}{n})$ So, $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \frac{b^2-a^2}{2} = \lim_{n\to\infty} s(f, P_n)$ Hence, f is integrable with $\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

(ir)rational

- $f(x) = \{ \begin{smallmatrix} 1, x \text{ rational} \\ 0, x \text{ irrational} \end{smallmatrix}$ nur Lebesgue differenuierbar.
- Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ with $f(x) = \{ \begin{smallmatrix} 0, x \text{ irrational or } x=0 \\ \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q}, p,q \text{ natural numbers, relatively prime} \end{smallmatrix}$ One can show $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

$\frac{\sin x}{\cos x}$

$\int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\ dt$ for $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$. We can use substitution: $\int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\ dt = -\int_a^b \frac{\cos' t}{\cos t}\ dt = -\int_a^b f(\cos t)\cos' t\ dt$ with $f(y) = \frac{1}{y}$. Using substitution (5.4.6) we then get $\int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\ dt = -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{x}\ dx = -\log(\cos(b)) + \log(\cos(a))$

It follows that an antiderivative of $\tan(t)$ is $-\log(\cos(t))$ for $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

example

$b > 1$.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}dx + \int_1^b \frac{1}{1+x^\alpha}dx$$

$\frac{1}{2x^\alpha} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}, \forall x \geq 1$.

example

$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))dx$

example

$\int \frac{1}{\sqrt{e^x - e^2}}$ with $u = e^x - e^2$: $\int \frac{1}{\sqrt{u}(u+e^2)}du$ with $v = \frac{\sqrt{u}}{e}$: $\int \frac{2e^2 v}{ve(v^2e^2+e^2)}dv = \int \frac{2}{v^2e+e}dv = \frac{2}{e}\arctan(v)$

example

$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{1+\cos(x)}\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)}dx = \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx - \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + \frac{1}{\sin(x)}$

example

$\int \frac{1}{\cos^4(x)}dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}dx$ with $u = \tan(x)$ we get $\int u^2 + 1du = \frac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x)$

example

$\int_{-e}^{e} \sin(-x^3)dx = \int_{-e}^{0} \ldots dx + \int_0^e \ldots dx = 0$

example

$\int \tan^4(x)dx = \int \tan^2(x)\tan^2(x)dx = \int \tan^2(x)\frac{1}{\cos^2(x)} - \tan^2(x)dx = \int \tan^2(x)\frac{1}{\cos^2(x)}dx - \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx + \int 1dx$ with $u = \tan x$ we get $\int u^2 du - \int 1du + \int 1dx = \ldots$

example

$\int (1 + 2ax^2)e^{ax^2}dx$
$= \int e^{ax^2}dx + 2a\int x^2 e^{ax^2}dx$
$= xe^{ax^2} - 2a\int x^2 e^{ax^2}dx + 2a\int x^2 e^{ax^2}dx$
$= xe^{ax^2}$

Area of Half Circle

Application 5.4.7 - lecture approach 1

Let $r > 0$ and $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ be defined on $[-r, r]$. Graphically, this corresponds to the half-circle above the x-axis with radius r. We want to compute a portion of the area of that half circle, i.e., $\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}dx$ with $-r \leq a < b \leq r$. We start by using a trick. That is, to use partial integration, we multiply by function to be integrated by 1, which we consider our g'. Then we have our function as f and $g(x) = x$. We get

$$\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}\ dx = \int_a^b 1 \cdot \sqrt{r^2-x^2}\ dx = \Big[x\sqrt{r}$$

$$= \Big[x\sqrt{r^2-x^2}\Big]_a^b + \int_a^b \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\ dx$$

Now, we employ a second trick: $x^2 = x^2 - r + r$ using that, we get

$$= \Big[x\sqrt{r^2-x^2}\Big]_a^b - \int_a^b \sqrt{r^2-x^2}\ dx + \int_a^b \frac{}{\sqrt{r^2}}$$

Now, we consider the special case $r = 1$ and with $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin'(x)$ get

$$= \Big[x\sqrt{1-x^2}\Big]_a^b - \int_a^b \sqrt{1-x^2}\ dx + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-}}$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b \sqrt{1-x^2}\ dx = \Big[x\sqrt{1-x^2}\Big]_a^b + \Big[\text{arcsin}$$

Thus, one antiderivative of $\sqrt{1-x^2}$ is $S(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x))$.

Application 5.4.7 - generalized lecture approach 2

Let $r > 0$ and $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ be defined on $[-r, r]$. Graphically, this corresponds to the half-circle above the x-axis with radius r. We want to compute the area of that half circle, i.e., $\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}dx$ with $-r \leq a < b \leq r$. Now let $\phi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-r, r], t \mapsto r \cdot \sin t$ We then also have for the inverse of ϕ^{-1} :

$t \mapsto \arcsin(\frac{t}{r})$. We get with by using $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos t \geq 0$ in the last step

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\phi(\phi^{-1}(a))}^{\phi(\phi^{-1}(b))} f(x)\ dx$$
$$= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\ dt$$
$$= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t\ dt$$
$$= r^2 \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} \cos^2 t\ dt$$

To compute $\int_\alpha^\beta \cos^n\ dt$ one can use $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. For $\cos^2 t$ we get $\cos^2 t = (\frac{e^{it}-e^{-it}}{2})^2 = \frac{e^{2it}+2+e^{-2it}}{4} = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$ for the integral we then get

$$\int_\alpha^\beta \cos^2(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \cos(2t)\ dt + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$
$$= \frac{1}{4}\int_{2\alpha}^{2\beta} \cos(y)\ dy + \frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\sin y\Big]_{2\alpha}^{2\beta} + \frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$= \frac{1}{4}(\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)) + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Now, one would only have to substitute α /β with $\phi^{-1}(a)$/$\phi^{-1}(b)$.

Application 5.4.7

[...] (Some general stuff repeating the meaning of integral as area.) Let $r > 0$ and $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ be defined on $[-r, r]$. Graphically, this corresponds to the half-circle above the x-axis with radius r. We want to compute the area of that half circle, i.e., $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$ Now, let $\phi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-r, r], t \mapsto r \cdot \sin t$ We can use 5.4.6 to get

$$\int_{-r}^r f(x)dx = \int_{\phi(-\frac{\pi}{2})}^{\phi(\frac{\pi}{2})} f(x)dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} r\cos t\ dt$$
$$= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\ dt$$

As $\cos t \geq 0, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, we get$\sqrt{\cos^2 t}\cos t$ and $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \ dt$ So, now we want to compute $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \ dt$ for which we use partial integration with $f(t) = \cos t$ and $g'(t) = \cos t$. Then, $g(t) = \sin(t)$. We use 5.4.5 to compute this integral

$$(\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \cos(-\frac{\pi}{2})\sin(-\frac{\pi}{2})) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)\sin t\ dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\ dt$$

So we see that $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\ \ dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \ dt$ From that follows $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \ dt = \frac{\pi}{2}$ Hence: $\int_r^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{\pi}{2}r^2$

Integration of Converging Series

Consider $f(x) = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$ which equals $= \sum_{n=0}^\infty x^n$ with convergence radius $\rho = 1$. For valid x ($|x| < 1$): $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$ In the other direction: $\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \Big[-\log(1-t)\Big]_0^x = -\log(1-x) - (-\log(1)) = -\log(1-x) = \log(\frac{1}{1-x})$ So: $\log(\frac{1}{1-x}) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$

Approximation von Summen

Beispiel 1

$f(x) = x^a, a \geq 0$ With $\int_1^n f(x)dx = \frac{n^{a+1}-1}{a+1}$ we can approximate a sum $\frac{n^{a+1}-1}{a+1} \leq 1^a + ... + n^a \leq \frac{(n+1)^{a+1}-1}{a+1}$ From that we get $1 - \frac{1}{n^{a+1}} \leq \frac{1^a+...+n^a}{\frac{n^{a+1}}{a+1}} \leq \frac{(n+1)^{a+1}(a+1)}{(a+1)n^{a+1}} - \frac{(a+1)}{(a+1)n^{a+1}}$ As we have $\to_{n\to\infty} 1$ for the lower and upper bound, we get $\lim_{n\to\infty} \frac{1^a+...+n^a}{\frac{n^{a+1}}{a+1}} = 1$ So, with $a = e$, we for instance get $1^e + ... + n^e \approx \frac{n^{e+1}}{e+1}$

Beispiel 2

$f(x) = \log x, S_n = \log(n!)$. We have:

$$\int_1^n \log t\ dt = \Big[x\log x - x\Big]_1^n$$
$$= (n\log n - n) - (-1) = n\log n - n + 1$$
$$\Rightarrow n\log n - n + 1 \leq \log n!$$
$$\leq (n+1)\log(n+1) - (n+1) + 1$$

Because $\frac{n\log n - n + 1}{n\log n - n} \to_{n\to\infty} 1$ and $\frac{(n+1)\log(n+1)-(n+1)+1}{n\log n - n} \to_{n\to\infty} 1$ we get $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n\log n - n} = 1$. So, we get $n! \approx \exp(n\log n - n) = (\frac{n}{e})^n$.

Beispiel 3

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$
$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

uneigentliche Integrale

1. $f(x) = e^{-cx}, c > 0$ is integrable on $[a, +\infty[$.
2. $f(x) = \frac{1}{x^a}$ is integrable on $[1, \infty[$ if $a > 1$. We have $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx = \frac{1}{a-1}$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^a}$ is integrable on $]0, 1]$ if $a < 1$. For example: $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \to_{x\to 0} 2$

McLaurin

We want to check whether $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^a}$ exists or not. So we consider $\int_2^\infty \frac{1}{t(\log t)^a}dt = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{y^a}dy$ with $y = \log t$. From an example above we know that $\int_{\log 2}^\infty \frac{1}{y^a}dy$ exists if and only if $a > 1$.